

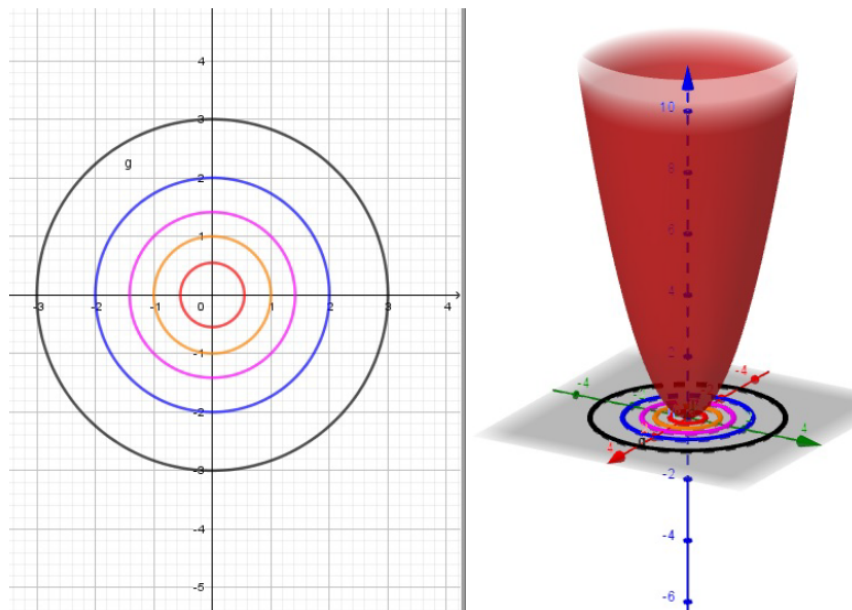
GUÍA PRÁCTICA TEMA 1: FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

1. Indique la expresión que utilizará para resolver los siguientes problemas.
  - a) Se quiere pintar un rectángulo de madera de base  $x$  y altura  $y$ . ¿Cuántos litros de pintura se necesitarán para darle una mano? Suponga un rendimiento de la pintura igual a  $1 \text{ litro}/\text{m}^2$ .
  - b) Un móvil se desplaza sobre una trayectoria rectilínea con velocidad constante  $v$ . Indique el espacio recorrido  $x$  en un tiempo  $t$ .
  - c) Calcule el volumen encerrado por una caja de cartón con forma de paralelepípedo, de ancho  $y$ , profundidad  $x$  y altura  $z$ .

Para cada caso, exprese la función que resuelve el problema, la cantidad de variables independientes involucradas y la naturaleza (escalar o vectorial) del resultado obtenido.

2. Determine y grafique el campo de existencia.
  - a)  $z = f(x, y) = 2xy^3 + \frac{y}{e^x} + 7$
  - b)  $z = f(x, y) = \frac{9}{xy}$
  - c)  $z = f(x, y) = \sqrt{\left(\frac{1}{4} - x^2 - y^2\right)}$
  - d)  $z = f(x, y) = \ln\left(\frac{x}{y} + y\right)$
  - e)  $z = f(x, y) = \frac{\sqrt{x}}{2 \ln(y - x^2)}$

3. Observe el mapa de contorno correspondiente a la superficie graficada. Indique la ecuación de la superficie y de las curvas de nivel naranja, azul y negra. Determine el valor de la constante  $k$  asociado con las tres últimas.



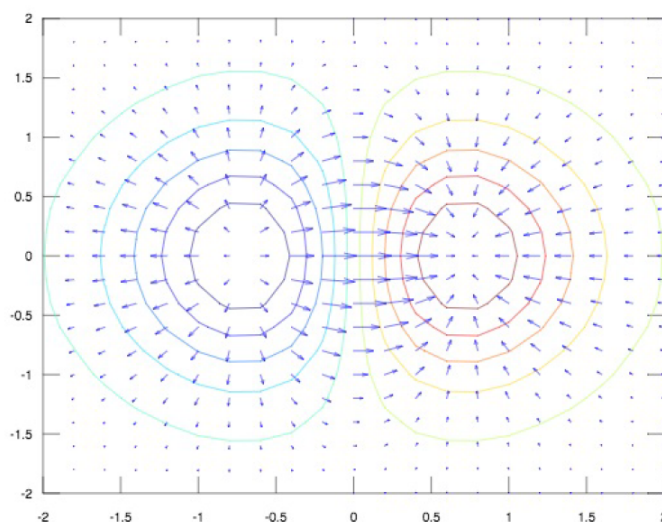
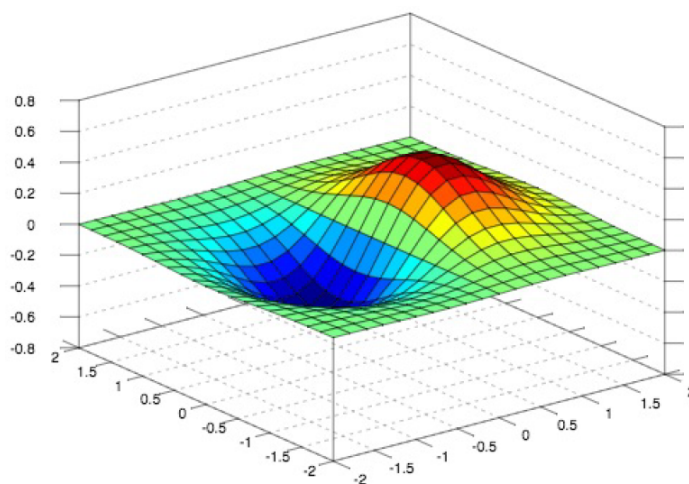
4. Indique la expresión de las curvas de nivel de las siguientes funciones. Realice un mapa de contorno con tres curvas.
- $f(x, y) = x + y + 1$
  - $f(x, y) = \frac{y}{x^2 + 1}$
  - $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
  - $f(x, y) = \frac{x}{y}, k = -2, 0, 1$
5. Dé la definición de derivada parcial de  $z = f(x, y)$  respecto a la variable  $y$ . Interprete geoméricamente y realice una representación gráfica.
6. El precio  $P$  de una vivienda, en función de la superficie  $S$  y de la calidad de sus materiales  $C$ , viene dado por una función  $P(S, C)$ . Analice si es razonable decir que  $\frac{\partial P}{\partial C} > 0$  y pensar que  $\frac{\partial P}{\partial S} < 0$ .
7. Se interseca la función  $z = f(x, y) = \sqrt{9 - 2x^2 - y^2}$ , con el plano de ecuación  $y = 1$ . Determine la ecuación de la recta tangente en el punto  $(\sqrt{2}, 1, 2)$ . ¿Cómo es la variación de la función en la dirección de  $x$  cuando  $y$  se mantiene fija?
8. Dada la función  $z = 2 - x - y^2$ , encuentre la recta tangente en el punto  $(2, 1, -1)$ , en el plano  $x = 2$ . Grafique e interprete.
9. Calcule las derivadas parciales de cada campo escalar.
- $f(x, y) = x^5 + 3x^3y^2 + 6xy^4$
  - $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$
  - $f(r, \theta, \varphi) = r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \varphi$
  - $f(x, t) = te^{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{x}\right)}$
  - $f(x, y, z, w) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + wz^2}}{w}$
10. Dada la función  $f(x, y) = e^{xy} + \operatorname{sen}((2x + 3y)\pi)$ , calcule:  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, f_x(0, 1), f_y(2, -1), f_{xx}(0, 1), f_{xy}(2, -1)$ . (Rta.:  $-5,28; -9,15; 1; -0,27$ )
11. Dada la función  $f(x, y) = x^2 \operatorname{sen} y + (3x + y^2) \cos x$ . Calcule:  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ . Evalúe las mismas en el punto  $(0, \pi)$ . (Rta.:  $3; 2\pi; -\pi^2; 2; 0$ )
12. Indique el concepto teórico que utiliza para probar que una función es diferenciable en un punto y en una región  $R$ .
13. Dados los siguientes campos escalares, indique si son diferenciables. Cuando sea posible, determine la región de diferenciability.
- $f(x, y) = \ln(2x + y^2); P_0 = (-2, 2), P_1 = (0, 1), P_2 = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ .
  - $f(u, v) = \operatorname{sen}(u^2v) + 5e^{3v}$
  - $f(x, y) = 2y^3 + (x - 1)^2$

- d)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$ ;  $P_0 = (1, 1)$ , ;  $P_1 = (1, 0)$ .
14. Dada la función  $f(x, y) = yx^2e^y$ , halle el incremento y el diferencial en el punto  $(1, 2)$ . Compare los resultados obtenidos.
- a)  $\Delta x = 1$  y  $\Delta y = 2$
- b)  $\Delta x = 0,05$  y  $\Delta y = 0,2$
15. Calcule el diferencial primero y segundo de las siguientes funciones. Indique la expresión de los diferenciales para los puntos dados.
- a)  $f(x, y) = y + \cos(xy)$ ,  $P = (\pi, 1)$
- b)  $f(x, y) = \frac{x}{y}$ ,  $P = (1, 2)$
- c) Indique la expresión del diferencial n-ésimo.
16. Un objeto de masa  $m$  se mueve a lo largo de un camino circular con velocidad angular constante  $\omega$ . Su movimiento se encuentra descrito por el vector posición  $\mathbf{r}(t) = R\cos(\omega t)\mathbf{i} + R\sin(\omega t)\mathbf{j}$ . Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza  $\mathbf{F}(t)$  que actúa sobre el objeto, sabiendo que  $\mathbf{F}(t) = m \cdot \mathbf{a}(t)$  y  $\mathbf{a}(t) = d^2\mathbf{r}(t)/dt^2$ .
17. Clasifique los siguientes campos en escalares o vectoriales. Indique el tipo de variable y el campo de existencia en cada caso. Cuando sea posible, calcule las imágenes de los puntos  $(1, 0)$ ,  $(1, -1, 1)$ ,  $(-1, 0, 0)$  y 4.
- a)  $f(x, y) = 40 - 4x^2 - y^2$
- b)  $\mathbf{F}(s, t) = (2st^2 - t^3)\mathbf{i} - 3st\mathbf{j}$
- c)  $g(u, v, w) = \frac{u^3}{v} - w^2$
- d)  $\mathbf{G}(x, y, z) = (xy, z^2x^5)$
- e)  $\mathbf{H}(t) = t^{1/2}\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$
18. Defina vector gradiente.
19. Dado el campo escalar  $g(x, y) = x - y^2$ , se pide:
- a) Encuentre  $\nabla g(3, -1)$  y determine la recta tangente a la curva de nivel  $g(x, y) = 2$  en  $(3, -1)$ .
- b) Grafique la curva de nivel, la recta tangente y el vector gradiente. Enuncie la propiedad utilizada.
20. Defina y determine el vector gradiente para los siguientes campos:
- a)  $f(x, y) = e^{x^2y}$ ;  $P = (1, 1)$
- b)  $w(u, v) = u\ln(v^2)$ ;  $P_1 = (1, e)$ ,  $P_2 = (1, 1)$ . Grafique.
- c)  $f(x, y) = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$ ;  $P = (1, 0)$
- d)  $f(x, y, z) = \sqrt[3]{z} + 3xy^2$

- e)  $f(x, y) = \cos(\pi x)\operatorname{sen}(\pi y) + \operatorname{sen}(2\pi y)$ ,  $P = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ . Grafique.
21. Dada la superficie  $z = x^2 + 3y^3 - (xy + 4)$ . Halle el vector normal, el plano tangente y la recta normal en el punto  $(2, 1, 1)$ . ¿Qué condición debe cumplir la función  $z = f(x, y)$  para admitir plano tangente?
22. Encuentre la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie de ecuación  $xy + yz + zx = 11$  en el punto  $(1, 2, 3)$ .
23. Si la temperatura en cualquier punto de un cuerpo homogéneo está dada por  $t(x, y, z) = e^{xy} - xy^2 - x^2yz$ , ¿Cuál es la dirección de máxima caída de la temperatura en el punto  $(1, -1, 2)$ ? ¿Cuál es la tasa o ritmo de disminución?
24. Determine la dirección en la cual la función  $t(x, y) = ye^{\operatorname{sen}(x-y)}$  aumenta más rápidamente en el punto  $(1, 1)$  y halle esa razón de cambio.
25. Defina derivada direccional. Interprete geoméricamente.
26. Calcule la derivada direccional de los siguientes campos:
- $z = \frac{x^2}{2} + \sqrt{y}$  en el punto  $(2, 1)$ , en la dirección del vector  $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ . (Rta.: 1.6)
  - $z = 2^y + \frac{y^3x}{3}$  en el punto  $(1, 2)$ , en la dirección que forma un ángulo de  $135^\circ$  con el eje  $x$ . (Rta.: 2.87)
  - $z = y^3 - 3x^2y - xy$ , en el punto  $P_0 = (3, 1)$ , en la dirección que va de  $P_1 = (2, 2)$  a  $P_2 = (-1, 6)$ . (Rta.: -10.2)
  - $z = y - 5x^2$ , en el punto  $P = (1, 1)$ , en la dirección que forma un ángulo de  $\frac{\pi}{6}$  radianes, con respecto al gradiente de la función. (Rta.: 8.7)
27. Dado el campo  $f(x, y) = e^{x^2y} + xy$  y los vectores  $\mathbf{u} = (1, 0)$  y  $\mathbf{v} = (0, 1)$ , calcule  $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$  y  $D_{\mathbf{v}}f(x, y)$ . ¿Qué relación existe entre estas derivadas direccionales y las derivadas parciales de la función  $f(x, y)$ ?
28. Dada una función diferenciable en todo  $\mathbf{R}^2$ , se sabe que el plano tangente a  $f(x, y)$  en el punto  $(1, 2)$  es  $2x + 3y + 4z = 1$ . ¿Se puede calcular, con estos datos, la derivada direccional de  $f$  en la dirección de  $v = (2, 2)$ ? ¿Cuál es ese valor? (Rta.: -0.88)
29. Si la ecuación de la recta normal a la superficie  $z = f(x, y)$  en un punto  $P$ , está dada por  $2(x - 2) = \frac{y - 3}{5} = -z + 2$ ,
- Determine el valor de la función en el punto  $P$  y  $\nabla f(P)$ .
  - Calcule la derivada direccional de  $z = f(x, y)$  en  $P$  y según la dirección que forma  $45^\circ$  con el eje  $x$ . (Rta.: 3.85)
  - Obtenga la ecuación del plano tangente a la superficie en  $P$ .

30. Enuncie las condiciones que debe cumplir una función compuesta, del tipo  $z = f[x(t), y(t)]$  para poder calcular  $dz/dt$  en algún punto de su dominio.
31. La presión  $P$  en  $kPa$ , el volumen  $V$  en litros y la temperatura  $T$  en  $^{\circ}K$  de un mol de un gas ideal se encuentran relacionados por la expresión  $PV = 8,31T$ . Encuentre la velocidad a la cual la presión cambia con respecto al tiempo si la temperatura es de  $300^{\circ}K$  y se incrementa a razón de  $0,1^{\circ}K/seg$ ; y el volumen es de 100 litros y se incrementa a razón de  $0,2l/seg$ .
32. Utilizando la regla de la cadena, halle  $\frac{df}{dt}$  para las siguientes funciones:
- $f(x, y) = \sqrt{x^2y}$ ;  $x(t) = lnt$ ;  $y(t) = cost$ . Calcule  $f'(1)$ . (Rta.: 0)
  - $f(x, y, z) = x^2y + \frac{y}{z}$ ;  $x = t - 1$ ;  $y = 2t$ ;  $z = lnt^2$ .
  - $f(x, y, z) = x^2ye^{1+z^2}$ ;  $x = t^2 + t$ ;  $y = t^2 + 1$ ;  $z = t^5 + 5$ .
33. Sea  $f(x, y) = x^2 + xy^3$ , donde  $x = x(t) = cost$  e  $y = y(t) = e^t$ . Se pide que,
- Derive  $F(t) = f(x(t), y(t))$ , respecto de  $t$ , aplicando la regla de la cadena.
  - Halle, explícitamente, la función compuesta  $F(t)$  y dérvela.
  - Analice ambos resultados.
34. Halle  $\frac{\partial z}{\partial u}$  y  $\frac{\partial z}{\partial v}$ , por la regla de la cadena,
- $z = \ln(x^2 - 2y^3)$ , con  $x = cosv$  e  $y = uv$
  - $z = e^{yx} + yw$ , con  $x = u + v$ ,  $y = -v$  y  $w = u^2$
35. a) Enuncie el teorema de existencia y unicidad de la función implícita de una variable.
- b) Verifique las condiciones y calcule  $\frac{dy}{dx}$  en los puntos indicados en cada caso.
- $F(x, y) = \text{sen}(x + y) + e^{y/x} = 0$ ;  $P_1 = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ,  $P_2 = (-1, 1)$  (Rta.: 0)
  - $F(x, y) = -xy^2 + x^2 - 2 = 0$ ;  $P_1 = (1, 0)$ ,  $P_2 = (-1, 1)$  (Rta.: 3/2)
36. a) ¿Qué condición debe cumplir  $z = f(x, y)$  para poder ser desarrollada en Serie de Taylor? ¿Por qué?
- b) Haga el desarrollo por serie de Taylor, hasta el orden  $n$ , de  $z = f(x, y)$ .
- c) ¿Para qué sirve este desarrollo?
37. Sea  $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 9$ . Encuentre una aproximación lineal de la función  $z = f(x, y)$ , en el entorno del punto  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$
38. a) Encuentre una aproximación lineal de la función  $f(x, y) = \ln(x - y) + 1$  en  $(2, 1)$ .
- b) Utilice el ítem anterior para aproximar  $f(2,02; 0,9)$ .
- c) Calcule el valor exacto de  $f(2,02; 0,9)$  y compárelo con el aproximado.

39. a) Halle el polinomio de segundo grado que mejor aproxima en el punto  $(0, \pi)$  a la función  $f(x, y) = \operatorname{sen}x \operatorname{sen}y$ .
- b) Desarrolle la función  $f(x, y) = \ln(x^2 + y)$  en potencias de  $x$  e  $(y - 1)$ , hasta el segundo orden.
- c) Encuentre el polinomio de Taylor de segundo orden para  $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + 2y)x^2$  en el punto  $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ .
- d) Halle el polinomio de segundo grado que mejor aproxime en el punto  $\left(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$  a la función  $f(x, y) = e^{xy} \operatorname{cos}y$ .
40. Dada la función  $f(x, y) = ye^{xy}$  y el punto  $P = (0, 1)$ ; se pide que:
- a) Determine la aproximación lineal en  $P$  y úsela para calcular  $f(0,1; 1,2)$ . (Rta.: 1.3)
- b) Determine la aproximación de segundo orden en  $P$  y úsela para calcular  $f(0,1; 1,2)$ . (Rta.: 1.345)
- c) Compare los resultados anteriores con el valor exacto de  $f(0,1; 1,2)$  e indique la conclusión a la que llega. (Rta.: 1.352)
41. Defina extremo relativo de  $z = f(x, y)$  en  $P_0 = (x_0, y_0)$
- a) ¿Qué concepto analiza para saber si la función presenta extremos?
- b) Enuncie las condiciones necesaria y suficiente de extremo relativo. ¿Por qué se analiza el signo del Hessiano?
42. Las siguientes figuras corresponden a la función  $z = xe^{-x^2-y^2}$ . Analícelas y concluya:
- a) ¿Qué puede observar respecto de la relación entre el vector gradiente y las curvas de nivel?
- b) Si se ubica en un punto dado de la superficie. ¿En qué dirección puede observar que aumenta más rápidamente? ¿Y en cuál disminuye más rápidamente?
- c) ¿Cuánto vale el gradiente en los puntos extremos de la función?
- d) Clasifique dichos extremos. ¿Qué puede decir respecto del plano tangente en estos puntos?



43. Calcule y clasifique los extremos de las siguientes funciones:

a)  $f(x, y) = 14x^2 - 2x^3 + 2y^2 + 4xy$

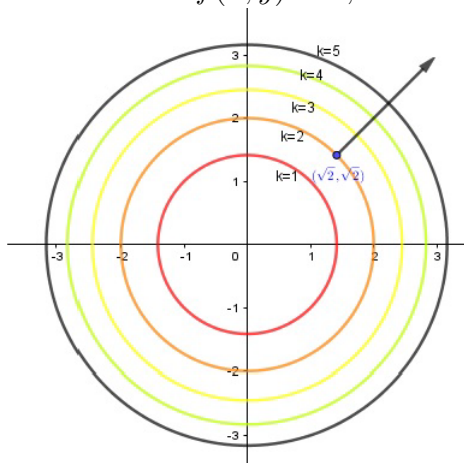
b)  $f(x, y) = x^3 + xy^2$

c)  $f(x, y) = 6xy + \frac{x^2}{2} + xy^2$

d)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$

e)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 27x - 12y$

44. Observe las siguientes curvas de nivel  $f(x, y) = k$ , de una función diferenciable.



Complete:

- $f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \dots$
- Si  $\nabla f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ , entonces  $f_x(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \dots$  y  $f_y(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \dots$
- ¿Cuál es el valor de la derivada direccional máxima en  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  y en qué dirección se da?
- Halle una aproximación lineal de la función en un entorno de  $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$  y estime el valor de  $f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ .
- La función presenta un extremo en  $(0, 0)$ . ¿Es un máximo o un mínimo? Justifique.
- Elija uno de los siguientes gráficos para la función  $z = f(x, y)$ . Justifique con dos argumentos distintos.

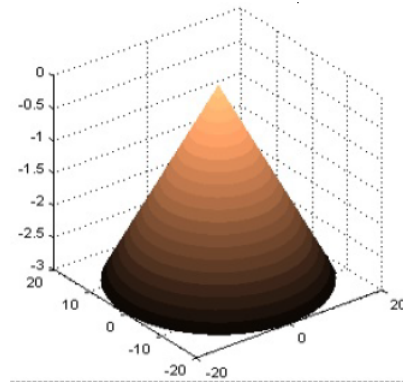


Figura 1.

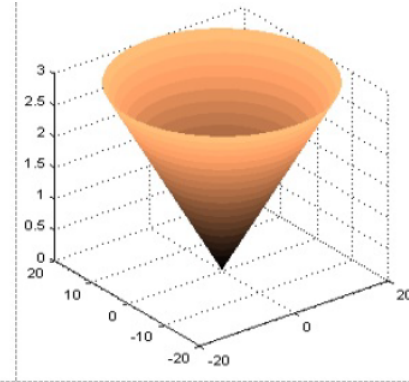


Figura 2.

- Encuentre los extremos de la función  $f(x, y) = 49 - x^2 - y^2$ , sujetos a la condición  $x + 3y = 10$ .
- Encuentre los extremos de la función  $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$ , sujetos a la restricción  $x - y - 6 = 0$ .
- Calcule la menor distancia entre el punto  $P(2, 5)$  y la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$ .

Aclaración 1: la distancia entre dos puntos se calcula como  $d(x, y) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ .

Aclaración 2: considere  $y = \pm\sqrt{29}\frac{10}{58}$ . (Rta.:  $d = 4,41$ )