GUÍA PRÁCTICA TEMA 3: ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

1. *a*) Defina ecuación diferencial. Dé un ejemplo.
   b) Dada una ecuación diferencial de primer orden y primer grado, definida implícitamente por *g(x, y, y') = 0*, exprese en forma analítica la solución de la misma.
   c) Dada una ecuación diferencial de primer orden y primer grado, definida explícitamente por *y' = f(x, y)*, exprese en forma analítica la solución de la misma.
   d) Diga qué representa geométricamente la solución general de una ecuación diferencial de primer orden y primer grado.
   e) Si a la ecuación mencionada en el punto anterior se le asigna una condición inicial, la solución obtenida se denomina .... y geométricamente representa ....
2. Complete, indicando lo que falta (ecuación diferencial, variable/s independiente/s, variable/s dependiente/s, tipo de ecuación, grado y orden).
   a) y" + 5y' + 2y = e^{-3t}
   b) Ecuación ordinaria, grado 3 y orden 4.
   c) $\frac{\partial u}{\partial t} = \text{k}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
   d) $\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3} = k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$
   e) Variable independiente t, variable dependiente x, ecuación ordinaria.
   f) $(y'''')^2 - 8x(y')^4 = senx$
3. Compruebe que la función propuesta es solución de la ecuación diferencial dada. Clasifique las soluciones en general y particular.
   a) $y = x\sqrt{1-x^2}$; $y'y = x - 2x^3$
   b) $y = \frac{senx}{x}; xy' + y = cosx.$
   c) $y = ln(C + e^x); y' = e^{x-y}$
   d) $y = C_1cos(4x) + C_2sen(4x); y'' + 16y = 0$
4. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables. Cuando sea posible, encuentre la solución particular.
   a) $\frac{dy}{dx} + ysenx = 0$
   b) $\frac{dy}{dx} = \frac{-3x+3xy^2}{yx^2+2y}$
   c) $y' = ye^{2x}; y(0) = e^{1/2}$
   d) $dx + e^{3x}dy = 0; y(0) = \frac{4}{3}$

5. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales. Identifique solución general y solución particular, según corresponda.
   a) $xy' + y = x; y(2) = 3$
   b) $y' - \dfrac{3}{x^2}y = \dfrac{1}{x^2}$
   c) $y' = x(x^2+9)^{1/2}; y(-4) = 0$
   d) $xy' - 2y = x^3e^x$

6. Considere los siguientes problemas.
   - Plantee el modelo matemático mediante una ecuación diferencial. Indique, en cada caso, las variables independiente y dependiente.
   - Determine la solución general de la ecuación planteada. Interprete en términos del problema.

   a) Encuentre la ecuación de la familia de curvas $y = f(x)$, tal que su pendiente, en cualquier punto, sea la suma del doble de la ordenada y la mitad de la abscisa del punto.
   b) La tasa de cambio con respecto al tiempo, de la velocidad v, de un bote costero de motor, es proporcional al cuadrado de v.
   c) La ecuación diferencial cuya solución es la familia de circunferencias de radio fijo r, con centro sobre el eje y. Grafique.
   d) Para cierta sustancia química, la velocidad de cambio de presión de vapor *(P)*, respecto a la temperatura *(T)*, es proporcional a la presión de vapor e inversamente proporcional al cuadrado de la temperatura.
   e) Usar la segunda ley de Newton para encontrar la ecuación diferencial de la velocidad, en un instante cualquiera, de un cuerpo de masa m que va cayendo (tal como un hombre desciende en paracaídas) y encuentra una resistencia del aire proporcional a su velocidad instantánea *v(t)*.
   f) La razón o velocidad con que cambia la temperatura de un cuerpo, con respecto al tiempo, es proporcional a la diferencia de temperaturas entre dicho cuerpo y el medio ambiente.
   g) Encuentre la ecuación de la familia de curvas $y = f(x)$ tal que su pendiente, en cualquier punto, sea la suma del duplo de la abscisa y seis veces la ordenada. Determine la curva que pasa por el origen de coordenadas.

7. Clasifique y resuelva las siguientes EDO. Identifique solución general y particular.
   a) $xdx + ydy = 0$. Grafique la solución particular que pasa por el punto $(0, 1)$.
   b) $wdw + te^{-w}dt = 0; w(0) = 1$

c) $senxcos^2ydx + cosxdy = 0$

d) $y' - 3y = e^{2t}$

e) $(x+1)y' = 4y; y(0) = 1$

f) $\dfrac{dv}{dt} + cos(2t) = 0; v(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{3}{2}$

g) $y(x+1) + y' = 0$. Resolver de dos formas distintas.

h) $y'tanx = y; y(\dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{\pi}{2}$

8. Determine las trayectorias ortogonales a la familia $y^2 = kx$. Grafique las curvas de ambas familias, que pasan por el punto $(1, 1)$.

9. Determine las trayectorias ortogonales a las familias de curvas dadas.

   a) $y^2 = Cx^3$

   b) $y = 1 + Ce^{4x}$

   c) $xy = C$

   d) $x + y = Ce^y$

10. Compruebe que la función $y = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{2}} sen(\sqrt{2}x)$ es solución de la ecuación diferencial $y'' + 2y' + 3y = 0$. Determine la expresión de la solución general. Considere las condiciones iniciales $y'(0) = 1$ y $y(0) = 0$.

11. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales homogéneas. En caso de tener condiciones iniciales, determine la solución particular. Indique en cada ecuación las variables independiente y dependiente.

    a) $y'' - 7y' + 12y = 0$

    b) $(D^3 - 2D^2)w = 0; w(0) = 1; w'(0) = 1; w''(0) = 2$

    c) $y'' - 5y' + 18y = 0; y(0) = 0; y'(0) = 1$

    d) $(D^2 - 1)y = 0; y(0) = 2; y'(0) = 0$

12. Escriba la solución general cuya ecuación característica tiene las siguientes raíces. Indique el orden de la ecuación diferencial.

    a) $2, 2, 2, 0, 0, -2.$

    b) $1, 1, 2, 1 + 3i, 1 - 3i.$

13. Siendo la solución general dada en el ejercicio anterior y utilizando el método de los coeficientes indeterminados, indique la solución particular para las diferentes expresiones de $Q(x)$.

    a) $Q(x) = x^3 + 5; Q(x) = e^{2x}$

    b) $Q(x) = sen(3x); Q(x)e^{-x}(x + 2)$

14. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales por el método de los coeficientes indeterminados e indique las soluciones general y particular según sea el caso.

a) $y'' + 4y = -2x^2 + x; y(0) = 1; y'(0) = 0$

b) $(D^2 + 2D + 1)y = 5e^{-x}$

c) $y'' + 2y' + 2y = 5e^{3x}; y(0) = 0; y'(0) = 0$

d) $(D^2 + 1)y = 3sen(2x)$

e) $y'' + 4y' = -2x^2 + 3x; y(0) = 0; y'(0) = 0$

f) $(D^2 - D)y = 2e^{2t}; y(0) = 0; y'(0) = 1$

g) $y'' + 4y = 3cos(2x); y(0) = 1; y'(\pi) = 1$

h) $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 10x + 3$

i) $y'' + 2y' + 2y = 5e^{6x}; y(0) = 0; y'(0) = -1$

j) $(D^2 - 2D + 1)y = 3e^{-x}$

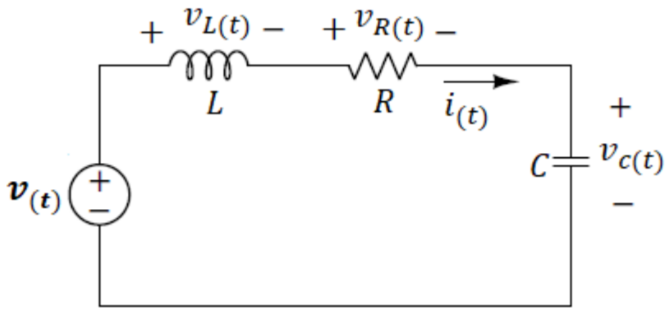
k) $y'' + y = 2cos(6x); y(0) = 1; y'(\pi) = \frac{\pi}{2}$

l) $(D^2 + 2D + 2)y = 5e^{6x}; y(0) = y'(0) = -1$

m) $y''' + y'' - 6y' = 3e^{-2x} - x; y(0) = 0; y'(0) = 1; y''(0) = 1$

n) $y'' - 2y' - 3y = 8e^{3x} + cos(2x)$

15. Circuitos. Un circuito RLC en serie, tiene la siguiente forma,



El mismo está compuesto por una fuente de tensión $v(t)$, una inductancia L, una resistencia R y un capacitor C. En cada uno de estos componentes hay una caída de voltaje, denotada como $v_L(t)$, $v_R(t)$ y $v_C(t)$, respectivamente. Por todos los componentes circula la misma corriente, $i(t)$. Físicamente, por la ley de mallas de Kirchhoff, se puede plantear la siguiente ecuación, que relaciona el voltaje de la fuente, con las caídas de voltaje de los componentes,

$$v(t) = v_L(t) + v_R(t) + v_C(t)$$

Donde los voltajes se definen como,

$$\begin{cases} v_L(t) = L \cdot \dfrac{di(t)}{dt} \\ v_R(t) = R \cdot i(t) \\ v_C(t) = \dfrac{q(t)}{C} \end{cases}$$

Siendo $q(t)$ la carga que hay en el capacitor, definida como:

$$q(t) = i(t)dt$$

Entonces,

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

De aquí que los voltajes pueden plantearse como sigue,

$$\begin{cases} v_L(t) = L \cdot \dfrac{d^2 i(t)}{dt^2} \\ v_R(t) = R \cdot \dfrac{dq(t)}{dt} \\ v_C(t) = \dfrac{q(t)}{C} \end{cases}$$

a) Una batería de *12 volts* se conecta a un circuito simple en serie, en el cual la inductancia es 1/2 *Henry* y la resistencia *10 Ohm*. Determine la corriente *(I)*, si la corriente inicial es cero. Grafique la solución obtenida.

b) Plantee y resuelva la ecuación diferencial resultante, para conocer cómo varía la carga en el tiempo, si $v(t) = 5 \cdot sen(100\pi t)$, siendo 100π la frecuencia angular real que tiene la red eléctrica y el sistema parte del reposo (todas las condiciones iniciales son nulas). Además: $L = 0,01H$, $C = 0,02F$ y $R = 200$.

16. Se tiene un sistema masa-resorte sin amortiguamiento, con una masa $m = 2kg$ y una constante de resorte $k = 5N/m$. Inicialmente, la masa se encuentra en reposo en su posición de equilibrio, pero se le aplica una fuerza inicial $F_0 = 8N$, en dirección contraria al desplazamiento. Encuentre la ecuación de movimiento $x(t)$ y determine la posición de la masa en un tiempo $t = 2s$.

17. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Indique las variables independiente y dependiente. Clasifique el tipo de solución obtenida.

a) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - y \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 5y - e^t; x\,(0) = 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = x - -y - e^t; y\,(0) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (D+2)\,x = 30; x\,(0) = 0 \\ (D+5)\,y = 4x; y\,(0) = 0 \end{cases}$

18. Considere dos tanques de agua (T_1 y T_2), conectados en serie, como los que se muestran en la figura. Se sabe que la variación del volumen de agua en cada tanque es directamente proporcional a la diferencia entre el caudal de entrada y el de salida de cada tanque (q_0, q_1 y q_2), según corresponda. Además, los caudales de salida de cada tanque son directamente proporcionales a la altura de agua (h_1 y h_2) e inversamente proporcionales a la resistencia ejercida por cada válvula (R_1 y R_2). Considere que el área transversal de cada tanque es constante e igual a A_1 y A_2,

respectivamente. Encuentre el sistema de ecuaciones diferenciales que modela el sistema bajo estudio.