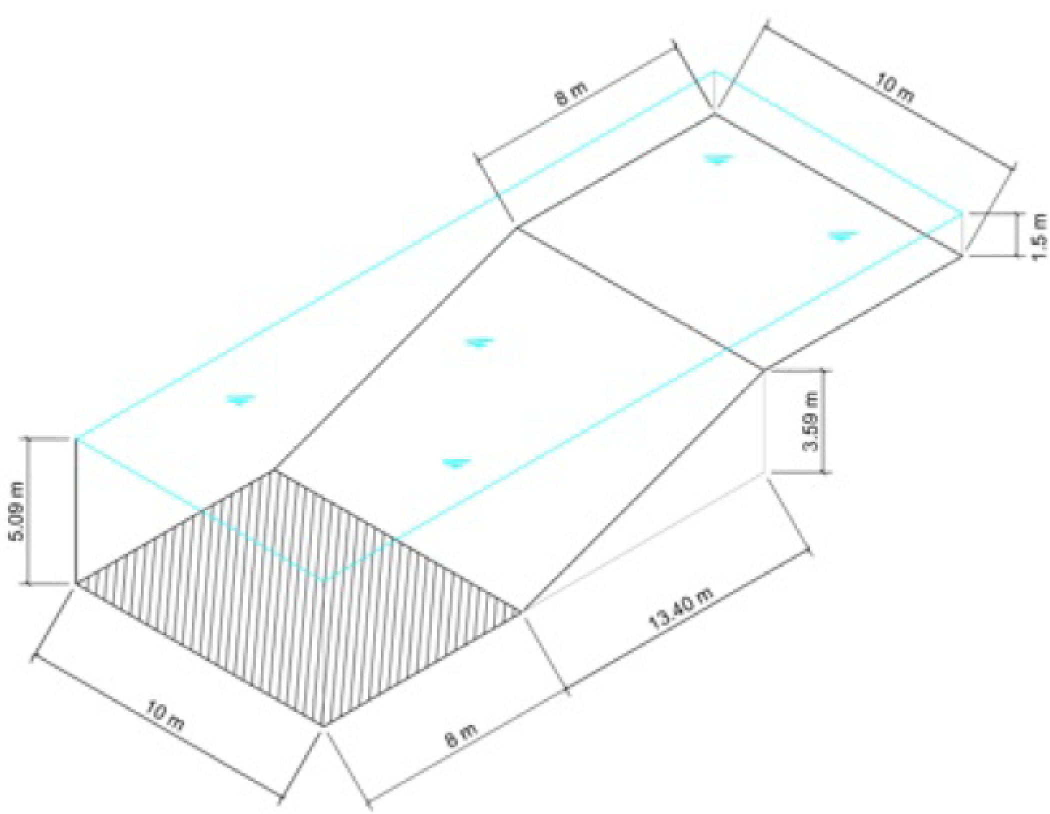
GUÍA PRÁCTICA TEMA 2: INTEGRALES MÚLTIPLES

1. Escriba la expresión que permite calcular por integrales dobles:
   a) El área de una región plana, R.
   b) El volumen de un sólido V, de altura $z = f(x, y)$.
   c) La masa total de una lámina R, con densidad $\sigma(x, y)$.

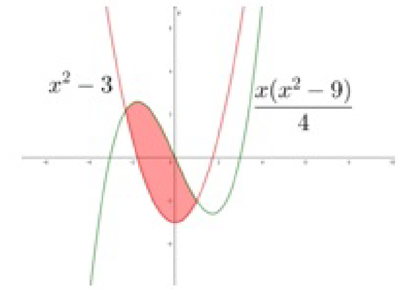
2. En los siguientes apartados, grafique la región de integración R y plantee mediante integración iterada, de dos formas distintas, $\iint_R dxdy$ y $\iint_R dydx$.
   a) $R: \begin{cases} y \geq x \\ y \leq \sqrt{x} \end{cases}$
   b) $R: \begin{cases} y \leq x + 2 \\ x \geq -1 \\ x \leq 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$
   c) $R: \begin{cases} y \leq \sin x \\ y \geq 0 \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$
   Considere la función $arcsen(y) = -i\ln(iy \pm \sqrt{1 - y^2})$

3. Dada la siguiente pileta, calcule los litros de pintura necesarios para pintar el área sombreada, suponiendo que 1 litro de pintura rinde 0,5 m^2. (Rta.: 160 litros)

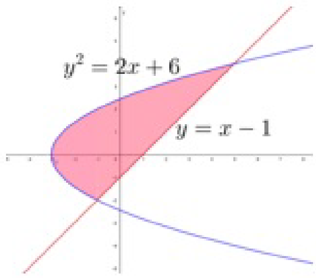


4. Calcule el área de las siguientes regiones. (Rta.: a) 8.65, b) 17.99, c) 2.82, d) 7.5, e) 1.27, f) 0.39, g) 2, h) 1.33)

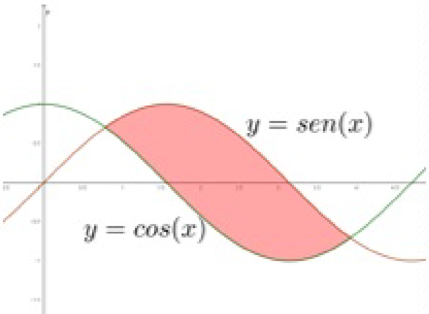
a.



b.



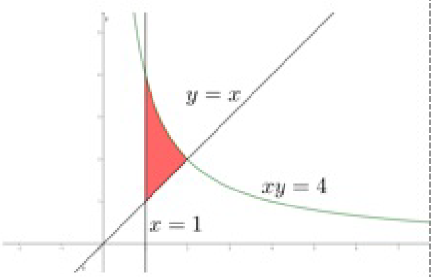
c.



d.

$$\begin{cases} y \geq x^2 + 2x \\ y \leq 3 \\ y \leq 3x + 6 \end{cases}$$

e.



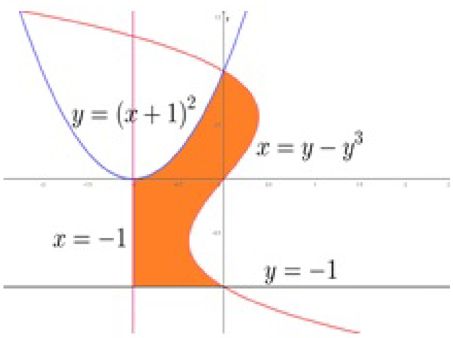
f.

$$\begin{cases} y \leq \ln x \\ y \geq 0 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

g.

$$\begin{cases} y \leq sen\, x \\ y \geq 0 \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

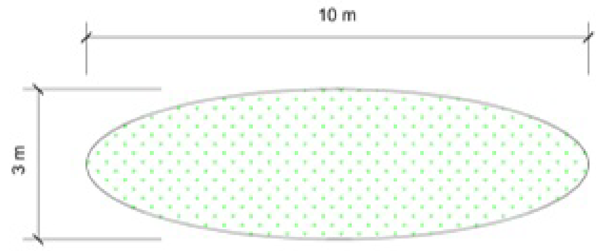
h.



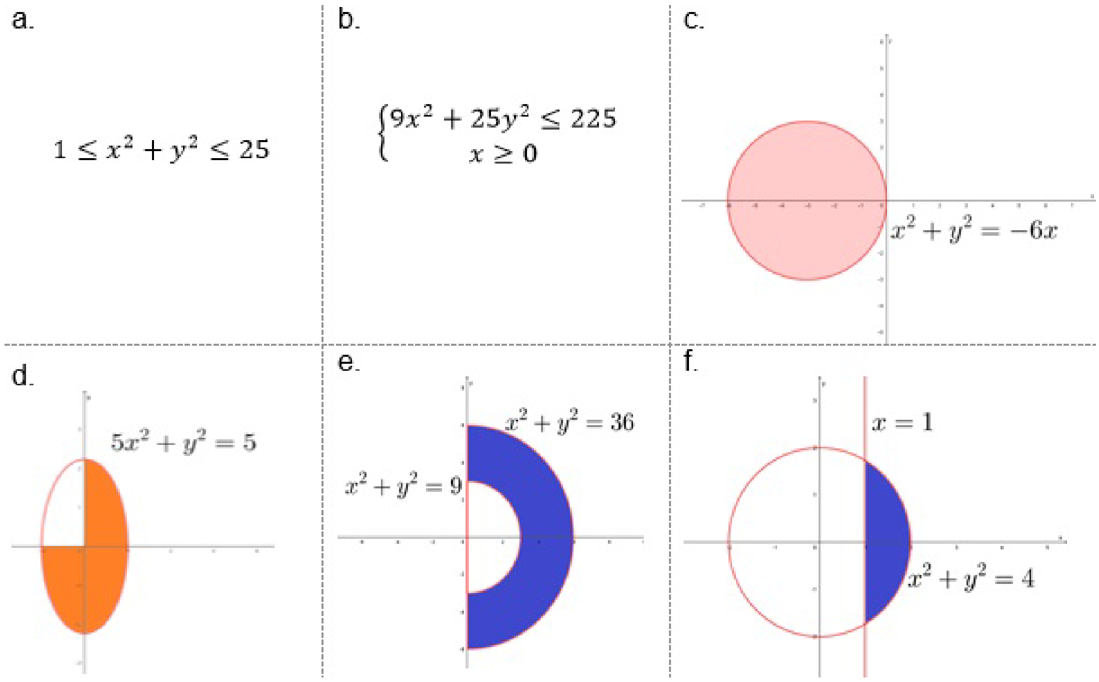
5. *a*) Indique analítica y gráficamente los cambios de coordenadas que puede realizar en el cálculo de áreas de regiones en $\mathbb{R}^2$ por integrales dobles.

   b) Proporcione un ejemplo de una región plana en el que utilice los cambios de coordenadas mencionados en el apartado *a*.

6. Determine el área a parquizar del jardín mostrado en la figura: (Rta.: 23.56)



7. Calcule el área de las regiones dadas a continuación. (Rta.: a) 24π, b) $7{,}5\pi$, c) 9π, d) $1{,}67\pi$, e) $13{,}5\pi$, f) 2.45)



8. Calcule $\iint_R \dfrac{dxdy}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$, donde R es el recinto dado por $x^2+y^2-2x \leq 0$. (Rta.: 2π)

9. Calcule la masa del sólido dado por la ecuación $\iint_R \sqrt{x+y}dxdy$, considerando a R como la región acotada por las respectivas rectas $y \leq x, y \geq -x$ y $x \leq 1$. (Rta.: 0.75)

10. Una lámina de densidad $\delta(x, y) = xy$ está limitada por el eje x, la recta $x = 8$ y la curva $y = x^{2/3}$. Encuentre su masa total. (Rta.: 153.6)

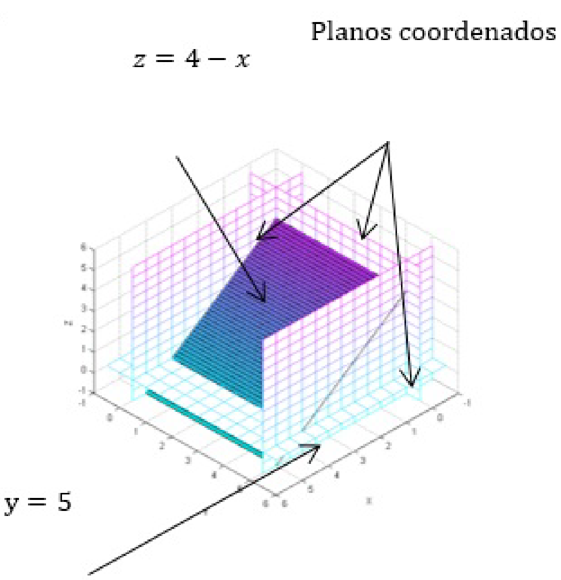
11. Encuentre el centro de gravedad de la lámina del ejercicio anterior. (Rta.: (6.15,2.22))

12. Encuentre los momentos de inercia, con respecto a los ejes x y y, de la lámina del ejercicio 10. (Rta.: $I_x = 877{,}71$, $I_y = 6144$)

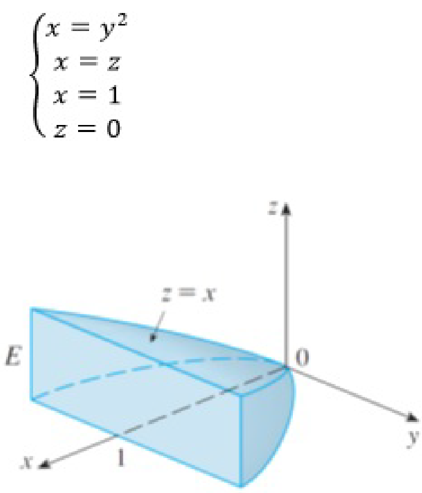
13. Encuentre la masa y el centro de gravedad de la lámina con densidad $\delta(x, y) = y$, limitada por las curvas $y = 0$, $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$. (Rta.: $m = \pi/4$, (0.45,0.98))

14. Escriba la expresión que permite calcular, por integrales triples, la masa de un sólido con densidad $\sigma(x, y, z)$.
15. Considerando la pileta del ejercicio 3.3., determine el volumen de agua que puede albergar. (Rta.: 753,4m^3)
16. Determine el volumen de los siguientes sólidos: (Rta.: *a*)40, *b*)4/5, *c*)5,33, *d*)0,08)

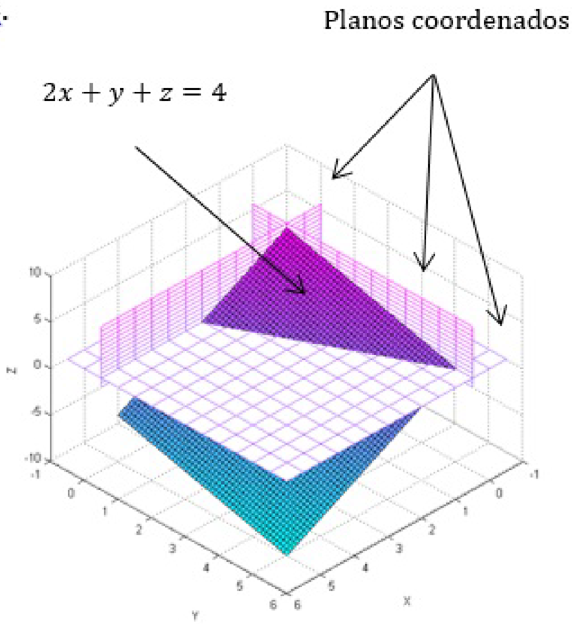
a.



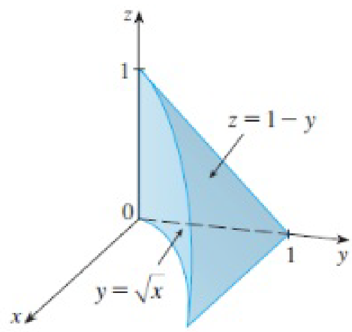
b.



c.



d.



17. *a*) Indique analítica y gráficamente los cambios de coordenadas que puede realizar en el cálculo de volúmenes de regiones en $\mathbb{R}^3$, por integrales triples.

    b) Deduzca la expresión del Jacobiano e indique su significado geométrico.
18. Determine el precio de un barril de cerveza cilíndrico, de altura $h = 53{,}2\ cm$ y diámetro $\phi = 40{,}8\ cm$, sabiendo que el precio por litro cuesta 200 pesos. (Rta.: $\$4427,94$)

19. Calcule el volumen de los sólidos definidos a continuación. (Rta: a) 4,5π, b) 1/3π, c)

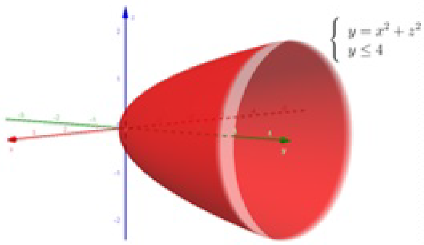
a. $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z \le 3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ 0 \le z \le 1 \end{cases}$

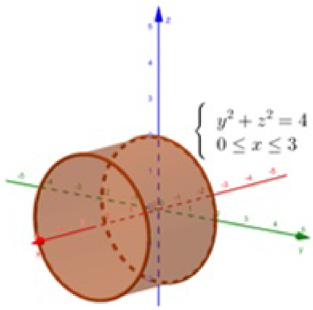
c. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ 0 \le z \le 2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2y \\ 0 \le z \le 4 \end{cases}$

e.

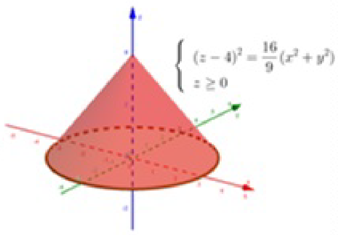


f.



g. $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16$

h.



i. $\begin{cases} z \le 10 - x^2 - y^2 \\ z \ge 1 \end{cases}$

j. $\begin{cases} z^2 \le x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 \ge 25 \\ z \ge 0 \end{cases}$

20. Calcule el volumen del sólido que es interior a la semiesfera $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y al cilindro $x^2 + y^2 - 4y = 0$.
21. Calcule el volumen del sólido acotado por $z = 4 - x^2$ e $y = 4 - x^2$, en el primer octante.
22. Calcule el volumen del sólido interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y por encima del cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.
23. Determine la masa de la lámina triangular con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,2)$ si la función densidad está dada por $\sigma(x,y) = 1 + 8x + y$.
24. Determine la masa del sólido con densidad constante $\sigma(x,y,z) = \sigma$, limitado por la superficie del ejercicio 12.b.
25. Halle la masa del elipsoide dado por la ecuación $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$, con $z \ge 0$. La densidad en cada punto del elipsoide, coincide con la distancia entre el punto y el plano xy.