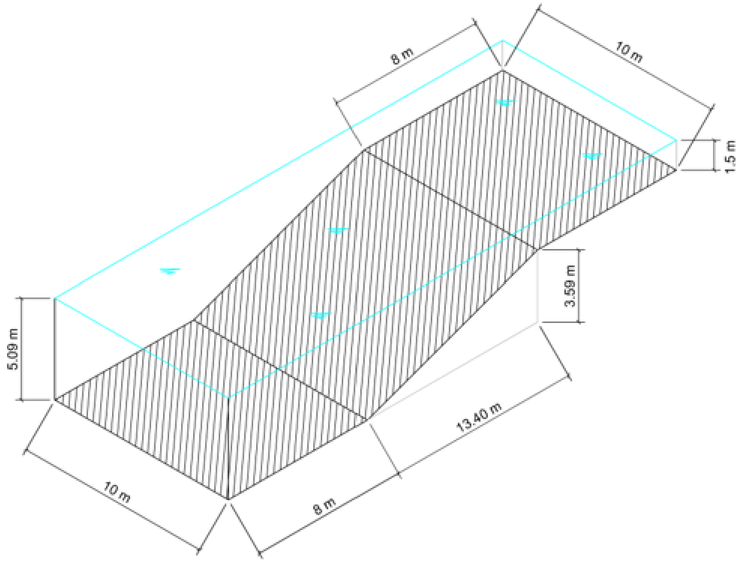
GUÍA PRÁCTICA TEMA 2: INTEGRALES DE SUPERFICIE

1. Determine la cantidad necesaria de mosaicos para tapizar el fondo de la siguiente pileta, sabiendo que entran 25 mosaicos por metro cuadrado. (Rta.: 7469,75 mos.)



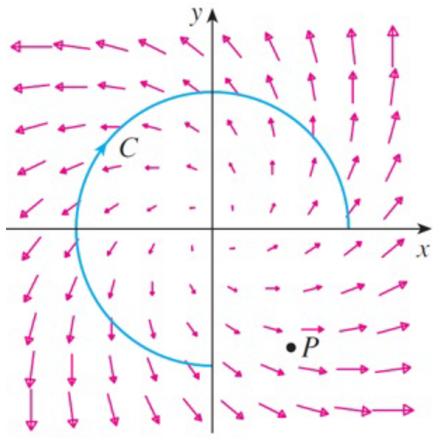
2. Indique la expresión para calcular el área lateral de una superficie.
3. Calcule el área lateral de las superficies dadas a continuación.
   a) $S : 2x + y + 4z - 8 = 0$, en el primer octante. (Rta.: $4\sqrt{21}$)
   b) $S : x + y = 3$ con $0 \leq z < 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. (Rta.: $6\sqrt{2}$)
   c) $S : x^2 + y^2 = z^2$, con $0 \leq z < 3$. (Rta.: $9\pi\sqrt{2}$)
   d) $S : y = x^2 + z^2$, con $0 \leq y < 2$. (Rta.: $13\pi/3$)
   e) $S : x^2 + y^2 + z^2 - 36 = 0$. (Rta.: 144π)
   f) $S : y^2 + z^2 = 4$, con $0 < x < 2$. (Rta.: 8π)
4. Calcule el flujo a través de las superficies indicadas, de los siguientes campos vectoriales:
   a) $\mathbf{F}(x, y, z) = [\ 3x \quad 8 \quad z\ ]^T$, con $S : x + y + z = 3$, en el primer octante. (Rta.: -18)
   b) $\mathbf{F}(x, y, z) = [\ 6x \quad 6y \quad z\ ]^T$, con $S : x^2 + y^2 - z = 0$, con $z < 9$. (Rta.: $-891\pi/2$)
   c) $\mathbf{V}(x, y, z) = [\ 0 \quad 0 \quad 3z^2\ ]^T$, con $S : x^2 + y^2 = 4$, con $0 < z \leq 3$. (Rta.: 108π)
   d) $\mathbf{F}(x, y, z) = [\ x \quad y \quad z\ ]^T$, siendo S la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. (Rta.: 32π)
5. Dado el campo $\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{bmatrix}$
   a) Indique la expresión que permite calcular la divergencia.
   b) ¿Cuál es la interpretación física?

6. Dado el campo $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{bmatrix}$

   a) Indique la expresión que permite calcular el rotor.

   b) ¿Cuál es la interpretación física?

7. Dada la siguiente figura en la que se encuentra representado un campo vectorial $\mathbf{F}$, una curva C y un punto P, responda:



   a) ¿La integral $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ es positiva, negativa o cero? Justifique su respuesta.

   b) ¿La divergencia del campo en el punto P es positiva, negativa o cero? Justifique su respuesta.

   c) ¿Es un campo vectorial conservativo o no conservativo? Justifique su respuesta.

8. Sea $f(x,y,z)$ un campo escalar y $\mathbf{F}(x,y,z)$ un campo vectorial. Diga si cada una de las expresiones siguientes tiene significado. Si no es así, explique la razón. Si tienen significado, indique si el resultado es un campo escalar o vectorial.

   a. $\nabla \times f$
   b. $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$
   c. $\nabla \boldsymbol{F}$
   d. ∇f
   e. $\nabla \times (\nabla f)$
   f. $\nabla(\nabla \cdot f)$

9. Calcule la divergencia y el rotor del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2y - z \\ -2x + z \\ xy^2 \end{bmatrix}$. Diga si este campo es incompresible o irrotacional. Justifique.

10. Enuncie el Teorema de Gauss, distinguiendo hipótesis y tesis. Diga el tipo de integrales que relaciona.

11. Calcule el flujo de los campos siguientes a través de las superficies indicadas:

    a) $\mathbf{F}(x,y,z) = [\ e^x \quad -ye^x \quad yz^2\ ]^T$, siendo S el sólido limitado por $2x+6y-12=0$, el plano $z=3$ y los planos coordenados del primer octante. (Rta.: 36)

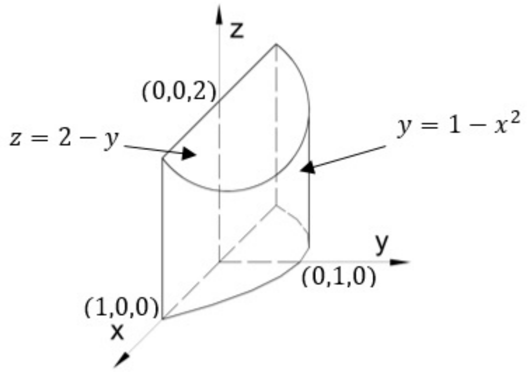
    b) $\mathbf{F}(x,y,z) = [\ xy \quad 3y^2 \quad yx^2\ ]^T$, $S: x^2+z^2=16$ y $0 \le y \le 1$. (Rta.: 56π)

c) $\mathbf{F}(x,y,z) = [\ y \quad 0 \quad z^2\ ]^T$, siendo S el sólido limitado por $z^2 = x^2 + y^2$; $z = 2 - x^2 - y^2$ y $z > 0$. (Rta.: $11\pi/6$)

d) $\mathbf{F}(x,y,z) = [\ xy \quad y^2z \quad 3xz\ ]^T$, $S : x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$. (Rta.: 0)

e) Resuelva el ejercicio 4.d., aplicando el teorema de la divergencia. (Rta.: 32π)

f) $\mathbf{F}(x,y,z) = [\ xy \quad y^2 + e^{xz^2} \quad \sin(xy)\ ]^T$, con S limitada por los planos coordenados del primer y segundo octante y las ecuaciones dadas en la figura: (Rta.: $16/7$)



12. Enuncie el Teorema de Stokes, distinguiendo hipótesis y tesis. Diga el tipo de integrales que relaciona.

13. Aplique el teorema de Stokes en forma conveniente.

a) $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} e^{xy}\cos z \\ x^2z \\ y \end{bmatrix}$, a través de la superficie $S : x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$, con $x > 0$. (Rta.: π)

b) $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} x + y^2 \\ y + z^2 \\ z + x^2 \end{bmatrix}$, siendo C el triángulo cuyos vértices tienen las siguientes coordenadas, $P_1 = (1,0,0)$; $P_2 = (0,1,0)$; $P_3 = (0,0,1)$. (Rta.: -1)

c) $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} xy^3z \\ \sin(xyz) \\ xyz \end{bmatrix}$, $S : y^2 = x^2 + z^2$, con $0 \leq y < 3$. (Rta.: 0)

d) $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} xy \\ yz \\ xz \end{bmatrix}$, a través de la superficie $S : z = 1 - x^2$, con $0 \leq y \leq 1$ y $z > 0$. (Rta.: 0) *e*) Un globo aerostático tiene forma esférica truncada (ver figura). Los gases calientes escapan a través de la superficie porosa a una velocidad

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z), \text{ siendo } \mathbf{F}(x, y, z) = [\ -y \quad x \quad 0\ ]^T$$

Calcule el flujo de gases calientes a través del globo. (Rta.: $R^2\pi/8$)