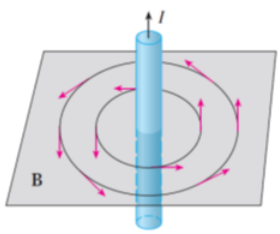
GUÍA PRÁCTICA TEMA 2: INTEGRALES DE LÍNEA

1. ¿Cuál es el concepto físico a partir del cual se define integral curvilínea para campos vectoriales? Indique la expresión que permite calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$.
2. Calcule el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = [\; xy \quad y \;]^T$, para mover una partícula desde el punto $(1, 0)$ al punto $(2, 4)$, a lo largo de la curva $y = x^3 - x^2$. (Rta.: 10,45)
3. Calcule las integrales de línea de los siguientes campos
   a) $\mathbf{F}(x, y) = [\; x^2 \quad -xy \;]^T$; a lo largo de la curva $C : x^2 + y^2 = 1$, comenzando por el punto $(0, 1)$ hasta el punto $(1, 0)$. (Rta.: 2/3)
   b) $\mathbf{F}(x, y, z) = [\; x \quad yz \quad -xy + zx \;]^T$ a lo largo del segmento de recta de extremos $(0, 0, 0)$ y $(1, 2, 2)$. (Rta.: 19/6)
   c) $\mathbf{F}(x, y) = [\; xy^2 \quad 2 - x \;]^T$ a lo largo de la curva $C : y = x^3 - 2x$, desde el punto $(2, 4)$ al punto $(1, -1)$. (Rta.: $-53/8$)
   d) $\mathbf{F}(x, y, z) = [\; x \quad -z \quad y \;]^T$ a lo largo de la curva descrita en forma paramétrica por el vector $\mathbf{r}(t) = [\; 2t \quad 3t \quad -t^2 \;]^T$; con $-1 \leq t \leq 1$. (Rta.: -2)
4. Complete
   a) $\int_C f(x, y) ds =$ ....
   b) La interpretación física que se le puede dar al resultado anterior es ....
5. Experimentos han mostrado que una corriente I que circula a través de un conductor largo produce un campo magnético $\mathbf{B}$, cuyos vectores son tangentes a cualquier círculo contenido en un plano perpendicular al conductor y cuyo centro coincide con el eje del mismo (Ver figura)



La ley de Ampere puede escribirse como:

$$\int_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{dr} = \mu_0 I$$

Donde I es la corriente neta que atraviesa cualquier superficie limitada por la curva cerrada C, y μ_0 es la permeabilidad eléctrica. Tomando a C como una circunferencia de radio R, demuestre que la magnitud del campo vectorial $\mathbf{B}$ (i.e. $|\mathbf{B}|$) a una distancia R del conductor es:

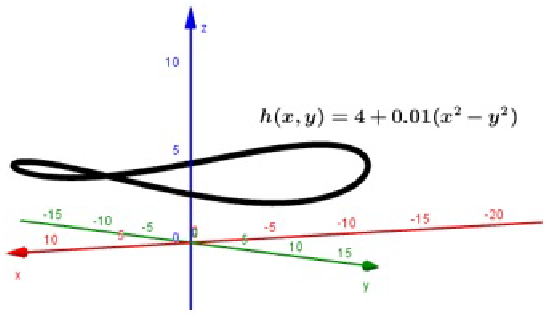
$$|\mathbf{B}| = B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

6. Calcule las integrales de línea con respecto a la longitud de arco dadas a continuación.

   a) $\int_C x ds$ y $C : y = x^2 - 1$, entre los puntos $(-1, 0)$ y $(2, 3)$. (Rta.: 4,9)

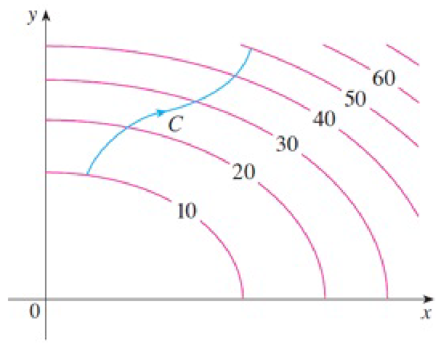
   b) $\int_C xy^2 ds$ y $C : x^2 + y^2 = 5$, recorrida en sentido positivo entre los puntos $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ y $\left(-\sqrt{5}, 0\right)$. (Rta.: $-2{,}946$)

   c) La base de un vallado circular de 10 m de radio, puede describirse en forma paramétrica como $\mathbf{r}(t) = [\ 10\cos t \quad 10\sin t\ ]^T$. La altura del vallado en un punto genérico (x, y) está dada por la función $h(x, y) = 4 + 0{,}01(x^2 - y^2)$ (Ver gráfica)

   Suponga que un litro de pintura alcanza para pintar 10 m^2 de vallado. ¿Cuántos litros de pintura harán falta para pintar ambos lados del vallado? (Rta.: $16\pi L$)

7. La figura muestra un mapa de contorno de una función $f(x, y)$ y una curva C. Calcule $\int_C \nabla f \cdot \mathbf{dr}$. (Rta.: 40)

8. *a*) ¿Cuáles son las consecuencias del Primer Teorema Fundamental de Integrales de Línea?

   b) ¿Para qué se usa el Segundo Teorema Fundamental de Integrales de Línea?

   c) ¿Cuándo un campo vectorial es gradiente?

   d) ¿Cómo es el trabajo de un campo gradiente a lo largo de diferentes trayectorias entre dos puntos?

   e) ¿Cuánto vale el trabajo de un campo conservativo a lo largo de una trayectoria cerrada? Justifique su respuesta.

f) Indique la expresión de las funciones potenciales de los campos siguientes y las condiciones que se deben cumplir, $\mathbf{F}(x, y)$ y $\mathbf{F}(x, y, z)$.

9. Dado el campo $\mathbf{F}(x, y) = [\ x \quad y+2\ ]^T$, (Rta.: 3)

   a) Calcule la integral del campo $\mathbf{F}$, a lo largo de:

   1) $C : y = x$ desde $(0, 0)$ hasta $(1, 1)$.
   2) $C : x = y^3$ desde $(0, 0)$ hasta $(1, 1)$.
   3) $C : (x-1)^2 + y^2 = 1$ desde $(0, 0)$ hasta $(1, 1)$.

   b) ¿Existirá otra trayectoria a lo largo de la cual la integral anterior también valga igual?

   c) Calcule $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$, con $\mathbf{F}(x, y) = [\ x \quad y+2\ ]^T$ utilizando el teorema correspondiente. Compare los resultados. ¿Qué concluye?

10. Dado el campo $\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} 4x^3 + 9x^2y^2 \\ 6x^3y + 6y^5 \end{bmatrix}$

    a) En el caso de ser un campo conservativo, determine su función potencial. (Rta.: $\phi(x, y) = x^4 + 3x^3y^2 + y^6 + C$)

    b) Calcule $\int\limits_{(0,0)}^{(1,2)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$. (Rta.: 77)

11. Dado el campo $\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} e^x \cos y + yz \\ xz - e^x \sin y \\ xy \end{bmatrix}$, determine si es conservativo. Halle la función potencial, en caso de existir. (Rta.: $\phi(x, y) = e^x cosy + xyz + C$)

12. Dada la función $f(x, y, z) = xyz^2 - x \sin y + 8z$, calcule $\int\limits_{(2,3,4)}^{(-1,5,-8)} \nabla f \cdot \mathbf{dr}$. (Rta.: $-512{,}67$)

13. La fuerza gravitacional de la Tierra sobre un objeto de masa m está dada por el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = [\ 0 \quad 0 \quad -mg\ ]^T$ (válido solamente en las cercanéas de la superficie), siendo g la aceleración de la gravedad. Determine la función potencial $\phi(x, y, z)$ y utilícela para mostrar que el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ al mover un objeto desde el punto de coordenadas (x_1, y_1, z_1) a otro punto cercano de coordenadas (x_2, y_2, z_2) resulta $mg(z_1 - z_2)$.

14. Calcule las integrales curvilíneas aplicando el teorema de Green.

    a) $\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} e^x + 2y \\ x^2 + \sin y \end{bmatrix}$, siendo C el rectángulo de vértices $(2, 1); (6, 1); (6, 4)$ y $(2, 4)$. (Rta.: 72)

    b) $\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} y - x \\ y^2 - x \end{bmatrix}$, siendo C la frontera de la región $2 \leq x^2 + y^2 \leq 3$, con $x \geq 0$, $y \geq 0$. (Rta.: $-\pi/2$)

c) $\oint_c (x^3+2y)\,dx+(4x-3y^2)\,dy$ y $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. (Rta.: $ab2\pi$)

15. Calcule las integrales de línea de los campos dados a continuación:

a) $\mathbf{F}(x,y)=\begin{bmatrix} y-x \\ \sqrt{x} \end{bmatrix}$, siendo C el segmento de recta que une los puntos $(5,45)$ y $(10,-22)$. (Rta.: $-162{,}62$)

b) $\mathbf{F}(x,y)=\begin{bmatrix} 3+2xy \\ x^2-3y^2 \end{bmatrix}$ y C se encuentra dada en forma paramétrica por el vector $\mathbf{r}(t)=[\ e^t\sin t \quad e^t\cos t\ ]^T$; con $0\le t\le\pi$. (Rta.: $e^{3\pi}+1$)

c) $\mathbf{F}(x,y,z)=\begin{bmatrix} y^2 \\ 2xy+e^{3z} \\ 3ye^{3z} \end{bmatrix}$, siendo C el triángulo de vértices $(0,0);(0,1)$ y $(1,1)$. (Rta.: 0)

d) Utilizando el campo vectorial del apartado *c.*, calcule el trabajo realizado por él, a través de la curva $C: z=\ln(x^2+y^2)-4\tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$, entre los puntos $P_1=(2;2;2{,}08)$ y $P_2=(4;4;3{,}46)$. (Rta.: 127866,12)

16. Verifique el teorema de Green para $\oint_c (y-x)dx+(2x-y)dy$, donde C es la frontera, tomada con orientación positiva, de la región acotada por $y=x$ e $y=x^2-x$. (Rta.: 4/3)

17. Sea C la curva cerrada, descrita por el par de gráficas $\begin{cases} y=\sin x \\ y=2\sin x \end{cases}$, con $x\in[0,\pi]$; orientada en sentido positivo. Calcule la siguiente integral, aplicando el teorema de Green: (Rta.: $-3\pi/2$)

$$\int_C (1+y^2)\,dx+ydy.$$