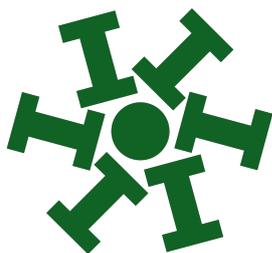


UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN JUAN



FACULTAD DE  
INGENIERÍA

Departamento de Matemática

ANÁLISIS MATEMÁTICO II - CÁLCULO II

Ing. en Agrimensura - Ing. Civil - Ing. de Minas -  
Ing. en Metalurgia Extractiva

INTEGRALES MÚLTIPLES

Equipo de cátedra

Mg. Ing. Pablo G. Marcuzzi Naveda  
Ing. Leandro Di Carlo

Dra. Ing. Cecilia Fernández  
Dra. Ing. Celia Román

Año 2024

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Integrales dobles</b>	<b>5</b>
2.1	Integrales iteradas . . . . .	9
2.2	Integrales sobre dominios no rectangulares . . . . .	11
2.3	Cálculo de áreas planas con integrales dobles . . . . .	13
2.4	Cambio de variables en el dominio de integración . . . . .	14
2.4.1	Coordenadas polares . . . . .	18
2.4.2	Coordenadas polares generalizadas . . . . .	21
2.5	Aplicaciones . . . . .	23
2.5.1	Masa de una lámina . . . . .	23
2.5.2	Centro de gravedad de una lámina . . . . .	25
2.5.3	Momento de inercia de una lámina . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Integrales triples</b>	<b>27</b>
3.1	Cambio de coordenadas en integrales triples . . . . .	31
3.1.1	Coordenadas cilíndricas . . . . .	32
3.1.2	Coordenadas esféricas . . . . .	35
3.2	Aplicaciones . . . . .	38
3.2.1	Masa de un sólido . . . . .	38
3.2.2	Centro de gravedad de un sólido . . . . .	39
3.2.3	Momento de inercia de un sólido . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Bibliografía</b>	<b>39</b>

# 1. Introducción

Existen muchos conceptos físicos tales como masa, volumen, centro de gravedad y momentos de inercia, entre otros. Estas cantidades son determinadas mediante integración de campos escalares, generalmente de más de una variable. Por esta razón al tipo de integrales que se verá en esta parte de la materia se las conoce como **integrales múltiples**. Más adelante, en el curso, se analizará la integración sobre campos vectoriales, los cuales aportarán otro grupo de magnitudes físicas de interés.

Para definir las integrales múltiples, es conveniente trazar un paralelismo con lo visto en Cálculo I. Para ello se hará una breve reseña de lo estudiado.

Una integral definida del tipo

$$\int_a^b f(x) dx,$$

podía interpretarse como el área comprendida entre el intervalo  $[a, b]$ , el eje  $x$  y la parte por debajo la curva  $y = f(x)$ , tal como se muestra en la Figura 1.1.

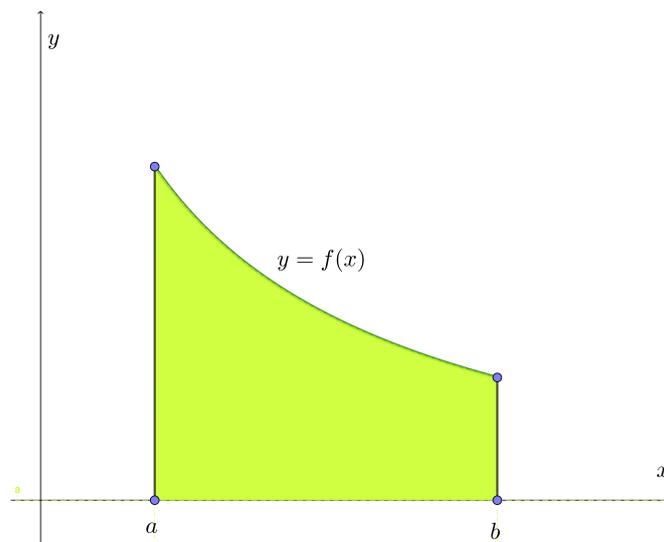


Figura 1.1: Integral de una variable

Existe más de un camino para llegar a la expresión de la integral. El que se mostrará aquí es el de las sumas de Riemann. En la Figura 1.2, el intervalo  $[a, b]$  se ha dividido en  $N$  subintervalos (con  $N + 1$  puntos) iguales  $\Delta x = [x_{i-1}, x_i]$ . La longitud de cada partición es  $\Delta x = (b - a)/N$ . La suma de Riemann se calcula como:

$$\sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x$$

Dependiendo del punto dentro del subintervalo (o partición) en el que se evalúe a la función, existirán distintos tipos de sumas de Riemann. De esta manera, si la función

se evalúa en el extremo izquierdo del subintervalo, se obtendrá la suma de Riemann por izquierda. Análogamente, se evalúa la función en el extremo derecho del subintervalo, dando lugar a la suma de Riemann por derecha.

Existen además, sumas de Riemann en el punto medio o la suma trapezoidal, en la que los rectángulos se reemplazan por trapecios.

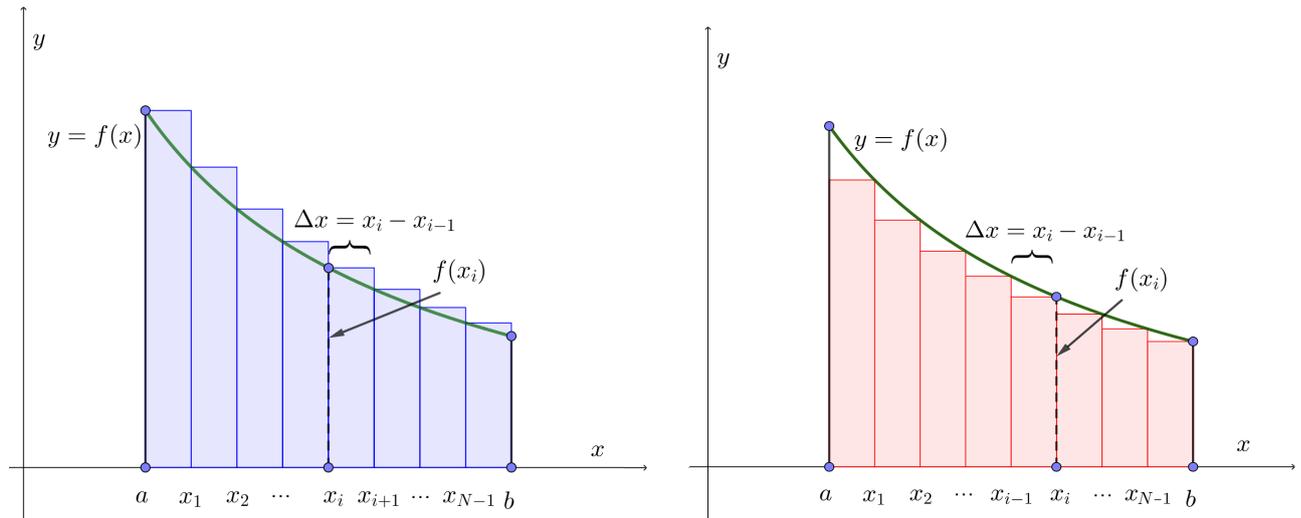


Figura 1.2: a) Suma de Riemann por izquierda; b) Suma de Riemann por derecha

Para encontrar de manera exacta el área bajo la curva, el número de subintervalos  $N$  debe tender a infinito, o lo que es igual, que la norma de la partición tienda a cero (ya que la expresión de  $\Delta x$  es  $(b - a)/N$ ). De esta forma, la integral definida resulta:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(x_i) \Delta x$$

En la Figura 1.3 se muestran las sumas por izquierda (exceso) y derecha (defecto) de este ejemplo. Puede notarse que a medida que aumenta el número de subintervalos ( $N \rightarrow \infty$ ) ambas sumas convergen al mismo valor, que es el área bajo la curva  $y = f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ .

Figura 1.3: Sumas de Riemann por izquierda y derecha

Ahora se verá que ocurre con un dominio bidimensional.

## 2. Integrales dobles

Sea  $z = f(x, y)$  una función definida y acotada en el rectángulo  $[a, b] \times [c, d]$  (Figura 2.1). Dicho rectángulo se denomina dominio de integración.

### Definición 2.1

Se denomina **dominio de integración** al rectángulo  $R$  definido como:

$$R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

Como se procedió para funciones de una variable, este dominio de integración se subdividirá en  $M \times N$  subrectángulos (con  $M + 1 \times N + 1$  puntos), de área  $R_{ij}$ . Las dimensiones de los rectángulos serán  $\Delta x = (b - a)/M$  y  $\Delta y = (d - c)/N$ .

Si la función  $z = f(x, y)$  se evalúa en un punto arbitrario  $(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$  de cada subrectángulo y se multiplica por su área  $\Delta A = \Delta x \Delta y$ , la suma de las  $M \times N$  particiones,

se conoce como suma de Riemann, que es un valor aproximado al volumen limitado por la curva  $z = f(x, y)$  y el dominio de integración  $[a, b] \times [c, d]$ :

$$V \approx \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

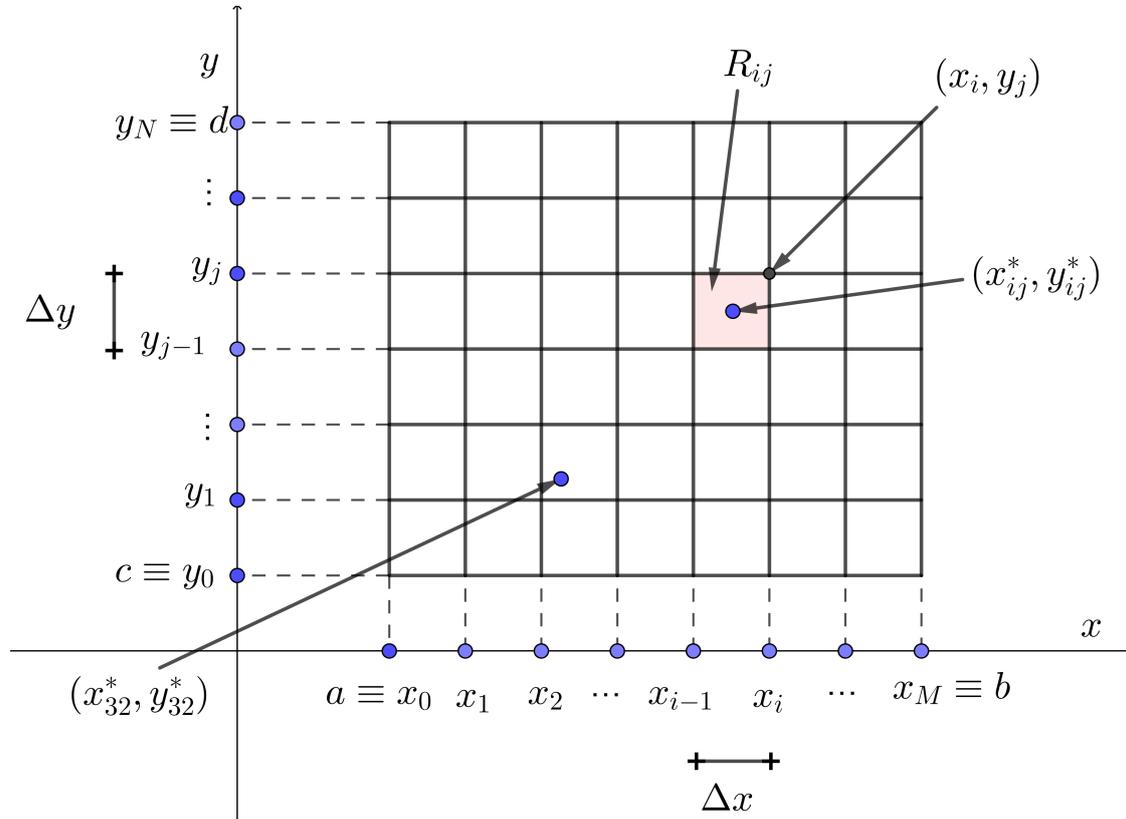


Figura 2.1: Subdivisión de rectángulos en el dominio de integración

Si el número de subdivisiones tiende a infinito, el resultado de la integral será igual al volumen mencionado anteriormente. De aquí surge una nueva definición:

**Definición 2.2**

La integral doble de la función  $z = f(x, y)$ , definida y acotada en un dominio de integración  $R$ , resulta:

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{M, N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$$

Si este límite existe.

En la Figura 2.2 se muestra cómo el volumen exacto bajo la función  $z = f(x, y)$  es aproximado a través de los prismas generados por la partición  $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A$ . Esta aproximación

se vuelve cada vez mejor a medida que el número de subrectángulos aumenta. Otra manera de ver esto es que la norma de la partición de cada subrectángulo (en este caso, es la diagonal cuya expresión es  $\|P\| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ) tiende a cero, como se muestra en la Figura 2.3.

Figura 2.2: Aumento de la cantidad de sub-intervalos

Figura 2.3: Límite de la partición (diagonal) cuando tiende a cero

Tomar el límite cuando la norma de la partición tienda a cero o cuando la cantidad de particiones tienden a infinito son situaciones equivalentes. A esta idea se llega inspeccionando las expresiones de  $\Delta x$  y  $\Delta y$ : sean  $a$  y  $b$  los extremos inferior y superior respectivamente del intervalo de integración en la dirección  $x$ ;  $c$  y  $d$  los extremos del intervalo en dirección  $y$ . Sean  $M$  y  $N$  la cantidad de subintervalos en las direcciones  $x$  y  $y$  respectivamente. Los incrementos de las variables se calculan como:

$$\Delta x = \frac{b - a}{M} \quad \text{y} \quad \Delta y = \frac{d - c}{N}$$

La expresión de la norma 2 de la partición es:

$$\|P\| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Si se reemplaza la expresión de los incrementos:

$$\|P\| = \sqrt{\left(\frac{b - a}{M}\right)^2 + \left(\frac{d - c}{N}\right)^2}$$

Analizando la expresión anterior, la única posibilidad para que la norma de la partición tienda a cero, es que tanto  $M$  como  $N$  (cantidad de subintervalos en los que se ha

subdividido la región de integración) tiendan a infinito (ya que  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son valores constantes).

## 2.1. Integrales iteradas

En esta sección se verá la forma de cálculo de una integral doble cuyo dominio es rectangular (como el mostrado en la Figura 2.1). El proceso consiste en considerar una variable constante mientras se integra la otra. El resultado de esta primera integral será una función de la variable que se mantuvo constante (o en su defecto un número), el cual será el integrando de la segunda integral. El proceso se completa cuando se resuelve la segunda integral. Esto puede generalizarse a  $n$  variables independientes.

Si se considera un dominio de integración rectangular  $R$  como el de la Figura 2.1 y una función de dos variables  $z = f(x, y)$ , integrable en  $R$ , primero se integrará con respecto a la variable  $y$ , manteniendo  $x$  constante. El resultado de esta primera integral será una función de  $x$  (ver la Figura 2.4):

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

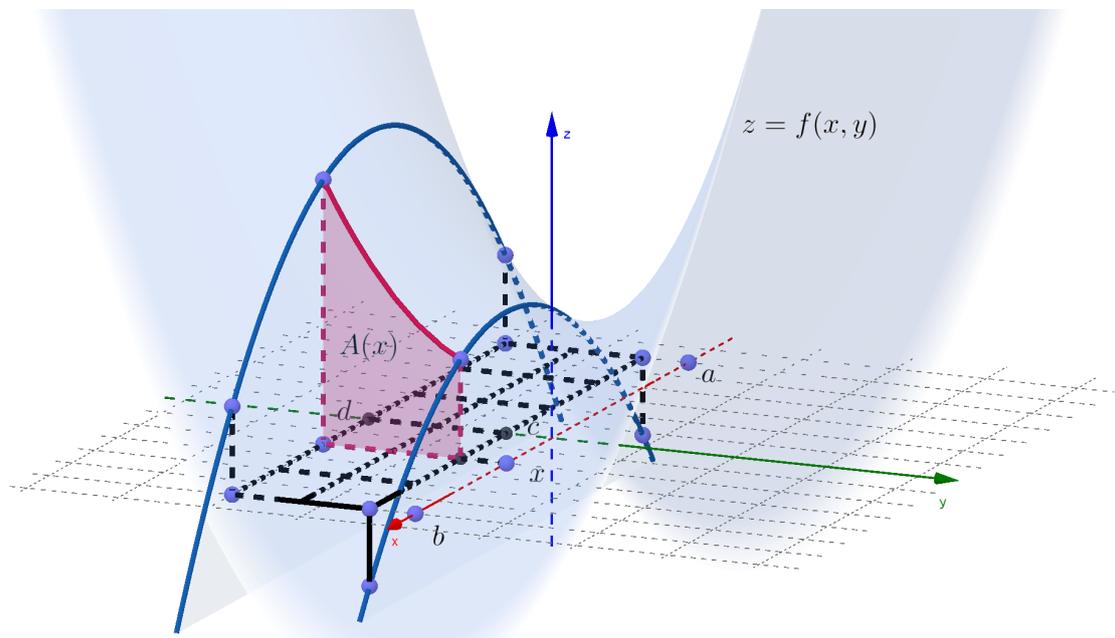


Figura 2.4: Integración iterada con  $x = \text{cte}$

Esta función  $A(x)$  será el integrando de la segunda integral, ahora con respecto a  $x$ :

$$\int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

La integral del lado derecho se denomina integral iterada y se resuelve de “adentro” hacia

“afuera”, en este caso, primero se integra con respecto a  $y$  y el resultado obtenido se integra con respecto a  $x$ .

El teorema de Fubini demuestra que si la función  $f(x, y)$  es continua en el dominio de integración  $R$ , con  $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , entonces el orden en el que se integre es indistinto. Esto es:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

### Ejemplo 2.1

Calcule el volumen bajo la función  $z = 1 - 0.2x^2 + 0.4y^2$ , cuyo dominio de integración está dado por  $R = \{(x, y) | -3 \leq x \leq 3, -2 \leq y \leq -0.5\}$ . Compruebe la igualdad:

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Como primer camino, se tomará a  $y$  como constante. La integral a resolver es:

$$V = \int_{-2}^{-0.5} \int_{-3}^3 (1 - 0.2x^2 + 0.4y^2) dx dy$$

Recordando que debe resolverse desde adentro hacia afuera, la primer integral es con respecto a  $x$ :

$$V = \int_{-2}^{-0.5} \left( x - \frac{0.2}{3}x^3 + 0.4y^2x \right) \Big|_{-3}^3 dy$$

Reemplazando por los límites de integración:

$$V = \int_{-2}^{-0.5} \left\{ \left( 3 - \frac{0.2}{3}3^3 + 0.4y^2 \cdot 3 \right) - \left[ -3 - \frac{0.2}{3}(-3)^3 + 0.4y^2 (-3) \right] \right\} dy$$

Operando:

$$V = \int_{-2}^{-0.5} \left[ (1.2 + 1.2y^2) - (-1.2 - 1.2y^2) \right] dy = \int_{-2}^{-0.5} (2.4 + 2.4y^2) dy$$

Se observa que el integrando es una función de  $y$ , que fue la variable que se dejó como constante. La integral respecto a  $y$  resulta:

$$V = \left( 2.4y + 2.4 \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-2}^{-0.5} = \left[ 2.4(-0.5) + 2.4 \frac{(-0.5)^3}{3} \right] - \left[ 2.4(-2) + 2.4 \frac{(-2)^3}{3} \right] = 9.9$$

El volumen resulta 9.9 unidades de volumen (ya que no se especificaron unidades de medida). A continuación se comprobará el resultado analizando el dominio con  $x$  constante (Ver Figura 2.4). La integral a resolver es:

$$V = \int_{-3}^3 \int_{-2}^{-0.5} (1 - 0.2x^2 + 0.4y^2) dy dx$$

Resolviendo desde adentro hacia afuera:

$$V = \int_{-3}^3 \left( y - 0.2x^2y + 0.4\frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-2}^{-0.5} dx$$

Reemplazando por los límites de integración:

$$V = \int_{-3}^3 \left\{ \left[ -0.5 - 0.2x^2(-0.5) + 0.4\frac{(-0.5)^3}{3} \right] - \left[ -2 - 0.2x^2(-2) + 0.4\frac{(-2)^3}{3} \right] \right\} dx$$

Operando:

$$V = \int_{-3}^3 \left( -\frac{31}{60} + 0.1x^2 \right) - \left( -\frac{46}{15} + 0.4x^2 \right) dx = \int_{-3}^3 \left( \frac{51}{20} - 0.3x^2 \right) dx$$

Integrando esta última ecuación:

$$V = \left( \frac{51}{20}x - 0.3\frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-3}^3 = \left( \frac{51}{20}3 - 0.3\frac{3^3}{3} \right) - \left[ \frac{51}{20}(-3) - 0.3\frac{(-3)^3}{3} \right] = 9.9$$

Se observa que el resultado es el mismo que se obtuvo considerando  $y$  constante. Con esto se verifica el Teorema de Fubini.

## 2.2. Integrales sobre dominios no rectangulares

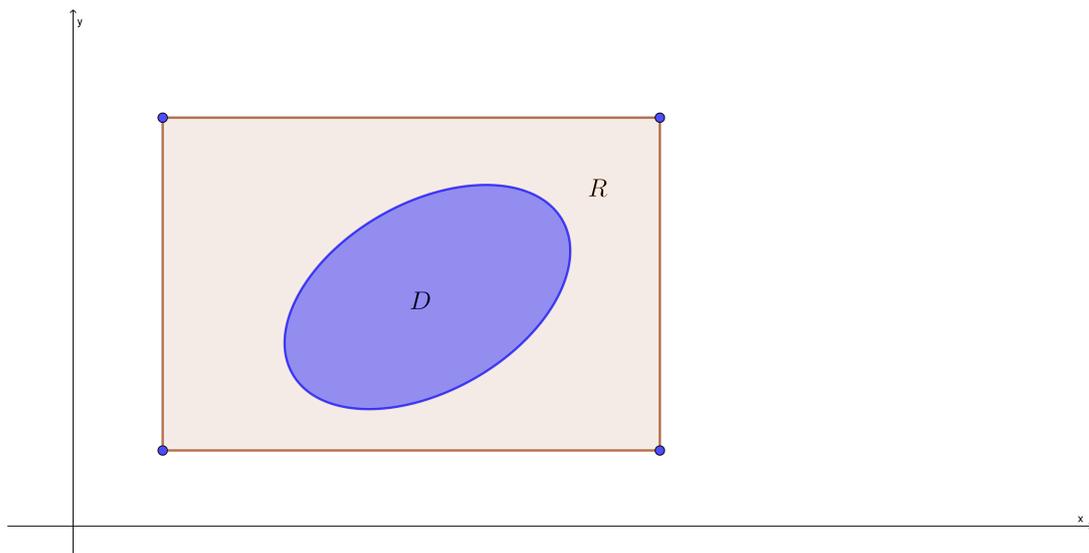


Figura 2.5: Integración iterada con dominio arbitrario

La resolución de integrales dobles vista en la Sección anterior consideraba un dominio de integración rectangular, lo que implicaba límites constantes (Vea el Ejemplo 2.1). Ahora se verá como proceder cuando el dominio de integración deja de ser un rectángulo y pasa a tener una forma arbitraria.

Para poder llevar a cabo la integración de una función  $z = f(x, y)$  sobre un dominio arbitrario (Figura 2.5), es necesario forzar la condición:

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{si } (x, y) \in R \cap \bar{D} \end{cases}$$

La razón de anular la función fuera del dominio  $D$  se debe a que en la Sección 2 se definió la integral doble sobre un dominio rectangular  $R$ , (ver la Definición 2.1). Sin embargo, como los puntos de interés pertenecen a  $D$ , los que se encuentra fuera de  $D$  y dentro de  $R$  no deben contribuir al resultado de la integral. Por lo tanto, se puede escribir:

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R F(x, y) dA$$

La integración se realiza de acuerdo a lo visto en la sección 2.1. Se verá primero con  $x$  constante.

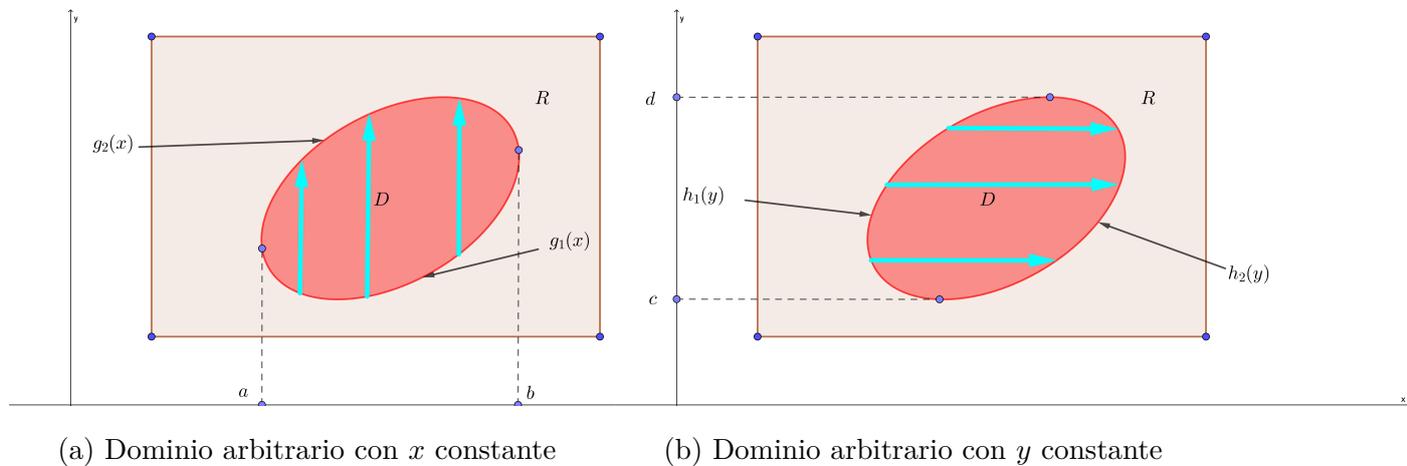


Figura 2.6: Dominio arbitrario

De acuerdo a la Figura 2.6a, la región de integración puede escribirse como  $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ . Teniendo en cuenta esto, la integral a calcular es:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

Análogamente, según la Figura 2.6b, la región de integración es  $R = \{(x, y) | c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$ , por lo que la integral resulta:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

Debe notarse que para establecer el orden de los límites superior e inferior, debe recorrerse a la región en el sentido que indican las flechas de color cian. Para poder aplicar este procedimiento, la región  $R$  debe ser cerrada y acotada. Es claro que si la función  $z = f(x, y)$  cumple con las condiciones del teorema de Fubini se verifica:

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy$$

### 2.3. Cálculo de áreas planas con integrales dobles

Hasta ahora se ha definido y tratado a una integral del tipo:

$$V = \iint_R f(x, y) \, dA$$

como el volumen encerrado entre el recinto de integración  $R$  y la función  $z = f(x, y)$ . Ahora bien, si se fuerza la condición  $f(x, y) = 1$ , el resultado de la integral será el área del recinto de integración  $R$ :

$$A = \iint_R 1 \, dA = \iint_R dA = \iint_R dx \, dy$$

De esta manera, dependiendo del valor que tome el integrando, las integrales dobles permiten el cálculo de un volumen (cuando  $z = f(x, y)$ ) o de un área plana (cuando  $z = f(x, y) = 1$ ). En la Sección 2.5 se verán más usos de estas integrales.

#### Ejemplo 2.2

Calcule el área de la región  $R$  mostrada en la Figura 2.7.

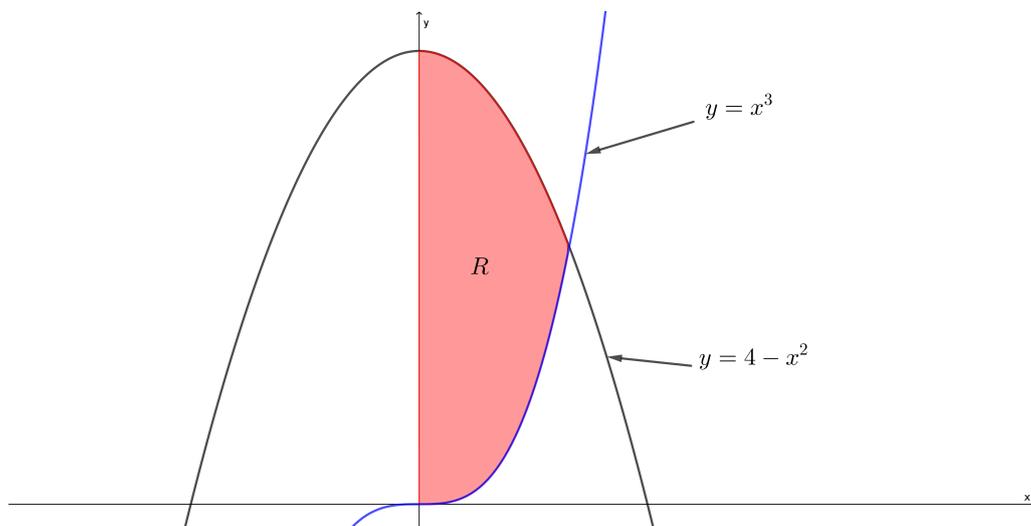


Figura 2.7: Ejemplo de cálculo de un área plana

Lo primero que hay que determinar son los límites de la región. Para ello, debe resolverse este sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 4 - x^2 \end{cases}$$

La resolución de este sistema arroja una ecuación de tercer grado:

$$x^3 + x^2 - 4 = 0,$$

cuyas raíces coinciden con los puntos en los que ambas funciones se cortan. La única raíz de interés es la raíz real (puesto que hay dos complejas conjugadas) y tiene el valor  $r_1 = 1.31459$ . Los límites de la región de integración son  $R = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1.31459, x^3 \leq y \leq 4 - x^2\}$ . La integral resulta:

$$A = \int_0^{1.31459} \int_{x^3}^{4-x^2} dy \, dx = \int_0^{1.31459} y \Big|_{x^3}^{4-x^2} dx$$

Reemplazando por los extremos:

$$A = \int_0^{1.31459} (4 - x^2 - x^3) \, dx = \left( 4x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^{1.31459} = 3.7544$$

Se deja al estudiante el cálculo considerando  $y$  constante para verificar el teorema de Fubini.

## 2.4. Cambio de variables en el dominio de integración

A menudo se presentan integrales cuyos límites presentan cierta complejidad al momento de integrarlos. En funciones de una sola variable, se procedía al método de sustitución para salvar estos problemas. Este consistía en transformar la función en otra cuya integración fuese más sencilla:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{t_1}^{t_2} f[g(t)] g'(t) \, dt \text{ con } x = g(t), \, a = g(t_1) \text{ y } b = g(t_2).$$

Esto era válido si  $g(t)$  tenía derivadas continuas en  $[t_1, t_2]$  y  $f$  debía ser continua en el conjunto de valores que formaba  $g(t)$  dentro del intervalo mencionado.

Este cambio de variables también puede realizarse en integrales múltiples, aunque el procedimiento no es tan trivial como en funciones de una sola variable.

En la Figura 2.8 se muestran dos conjuntos que pertenecen a  $\mathbb{R}^2$ :  $T$  en el plano  $uv$  y  $R$  en el plano  $xy$ .

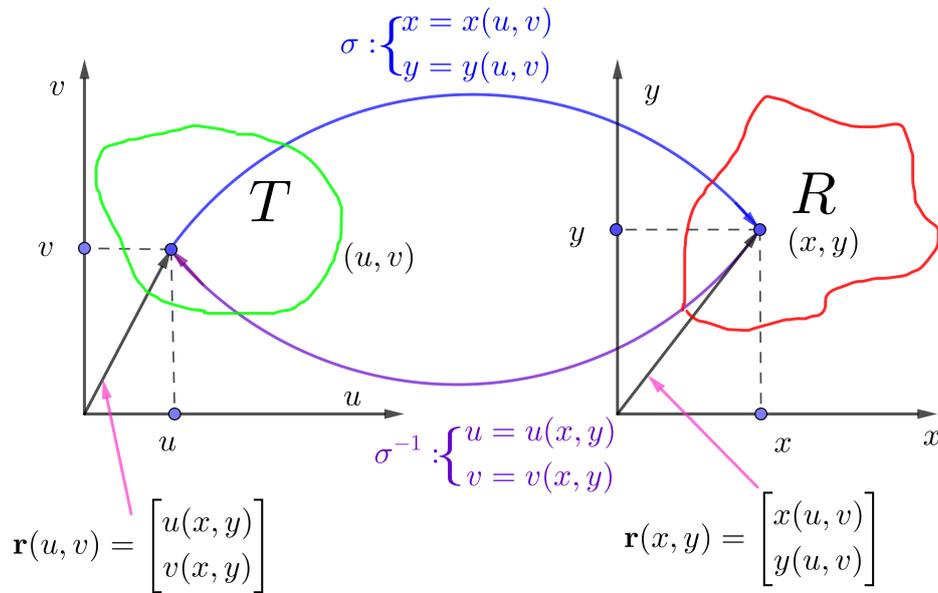


Figura 2.8: Transformación de coordenadas

Se define la aplicación vectorial  $\sigma$  la cual hace corresponder a cada punto del plano  $T$  con coordenadas  $(u, v)$ , un punto en  $R$ , de coordenadas  $(x, y)$ . La expresión de  $\sigma$  es:

$$\sigma : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

Un punto  $(u_0, v_0)$  en el plano  $uv$  (Ver Figura 2.9), descrito por un vector  $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ , mediante la aplicación de  $\sigma$ , se transforma en un vector  $\mathbf{r}(x_0, y_0) = [x(u_0, v_0) \ y(u_0, v_0)]^T$  en el plano  $xy$ .

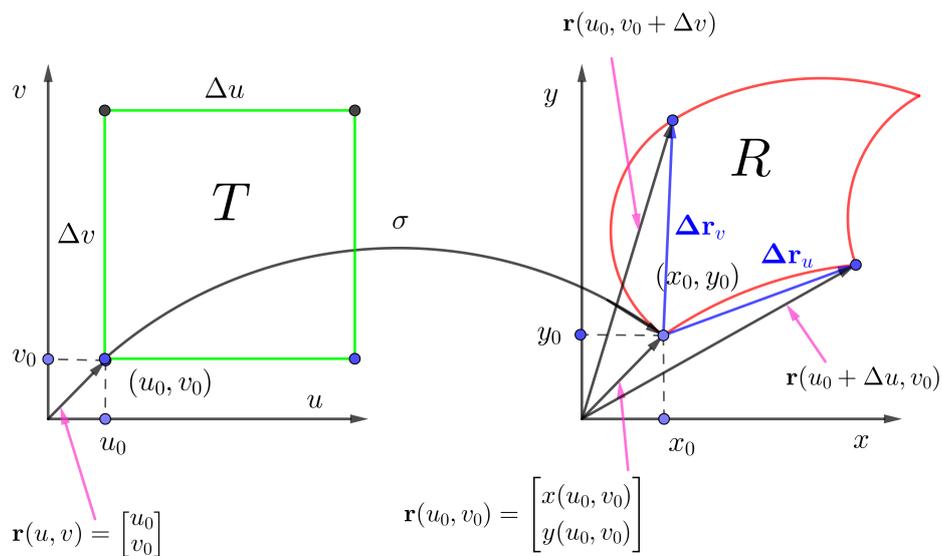


Figura 2.9: Deducción del Jacobiano

Se desea conocer el comportamiento de  $x$  y  $y$  cuando las variables  $u$  y  $v$  se incrementan

en cantidades  $\Delta u$  y  $\Delta v$ , respectivamente. Siguiendo con la Figura 2.9, en el plano  $uv$  si se incrementa la variable  $u$  a  $u + \Delta u$  (note que  $v = v_0$  es constante), el vector en el plano  $xy$  resulta:

$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) = \begin{bmatrix} x(u_0 + \Delta u, v_0) \\ y(u_0 + \Delta u, v_0) \end{bmatrix}$$

De la misma manera, si se incrementa la variable  $v$  en  $v_0 + \Delta v$  (con  $u = u_0$  constante):

$$\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) = \begin{bmatrix} x(u_0, v_0 + \Delta v) \\ y(u_0, v_0 + \Delta v) \end{bmatrix}$$

Utilizando el concepto del diferencial (o la aproximación de Taylor hasta el primer orden), los vectores incrementados pueden escribirse como (vea la Figura 2.9):

$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) = \begin{bmatrix} x(u_0 + \Delta u, v_0) \\ y(u_0 + \Delta u, v_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(u_0, v_0) + \left. \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u \right|_{(u_0, v_0)} \\ y(u_0, v_0) + \left. \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u \right|_{(u_0, v_0)} \end{bmatrix}$$

El otro vector incrementado resulta:

$$\mathbf{r}(u_0, v_0 + \Delta v) = \begin{bmatrix} x(u_0, v_0 + \Delta v) \\ y(u_0, v_0 + \Delta v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(u_0, v_0) + \left. \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v \right|_{(u_0, v_0)} \\ y(u_0, v_0) + \left. \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v \right|_{(u_0, v_0)} \end{bmatrix}$$

La longitud  $\Delta u$  en  $T$  equivale a la diferencia entre los vectores  $\Delta \mathbf{r}_u = \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$ :

$$\Delta \mathbf{r}_u = \begin{bmatrix} x(u_0, v_0) + \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_{(u_0, v_0)} \Delta u \\ y(u_0, v_0) + \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_{(u_0, v_0)} \Delta u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x(u_0, v_0) \\ y(u_0, v_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_{(u_0, v_0)} \\ \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_{(u_0, v_0)} \end{bmatrix} \Delta u$$

Que es igual al vector  $\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|_{(u_0, v_0)}$  evaluado en el punto  $(u_0, v_0)$ , multiplicado por el incremento  $\Delta u$ . Siguiendo un razonamiento análogo, si en  $T$  se incrementa  $v_0$  una cantidad  $\Delta v$ , manteniendo  $u = u_0$  constante, se tiene:

$$\Delta \mathbf{r}_v = \begin{bmatrix} x(u_0, v_0) + \left. \frac{\partial x}{\partial v} \right|_{(u_0, v_0)} \Delta v \\ y(u_0, v_0) + \left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_{(u_0, v_0)} \Delta v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x(u_0, v_0) \\ y(u_0, v_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial x}{\partial v} \right|_{(u_0, v_0)} \\ \left. \frac{\partial y}{\partial v} \right|_{(u_0, v_0)} \end{bmatrix} \Delta v$$

Que es igual al vector  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Big|_{(u_0, v_0)}$  evaluado en el punto  $(u_0, v_0)$ , multiplicado por el incremento  $\Delta v$ .

El área del paralelogramo se obtiene realizando el producto vectorial (o producto cruz) entre los vectores  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Big|_{(u_0, v_0)}$  y  $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Big|_{(u_0, v_0)}$  :

$$\Delta A \approx \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Delta u \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Delta v \right|_{(u_0, v_0)} \approx \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|_{(u_0, v_0)} \Delta u \Delta v \approx \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} & \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} & 0 \end{vmatrix}_{(u_0, v_0)} \Delta u \Delta v$$

Resolviendo el producto vectorial:

$$\Delta A \approx \begin{vmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} & \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \end{vmatrix}_{(u_0, v_0)} \Delta u \Delta v \approx \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{(u_0, v_0)} \Delta u \Delta v$$

### Definición 2.3

Sea una transformación biunívoca  $\sigma$  definida como:

$$\sigma : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

Se denomina **Jacobiano de la transformación** a la expresión:

$$J(u, v) = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} \\ \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} & \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} - \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} \frac{\partial x(u, v)}{\partial v}$$

Inspeccionando la Figura 2.10 puede establecerse la siguiente relación entre ambos dominios:

$$\Delta A = \Delta x \Delta y = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v$$

De esta manera puede decirse que el Jacobiano es un factor de proporcionalidad entre las áreas de  $T$  y  $R$ , considerada a través del paralelogramo tangente.

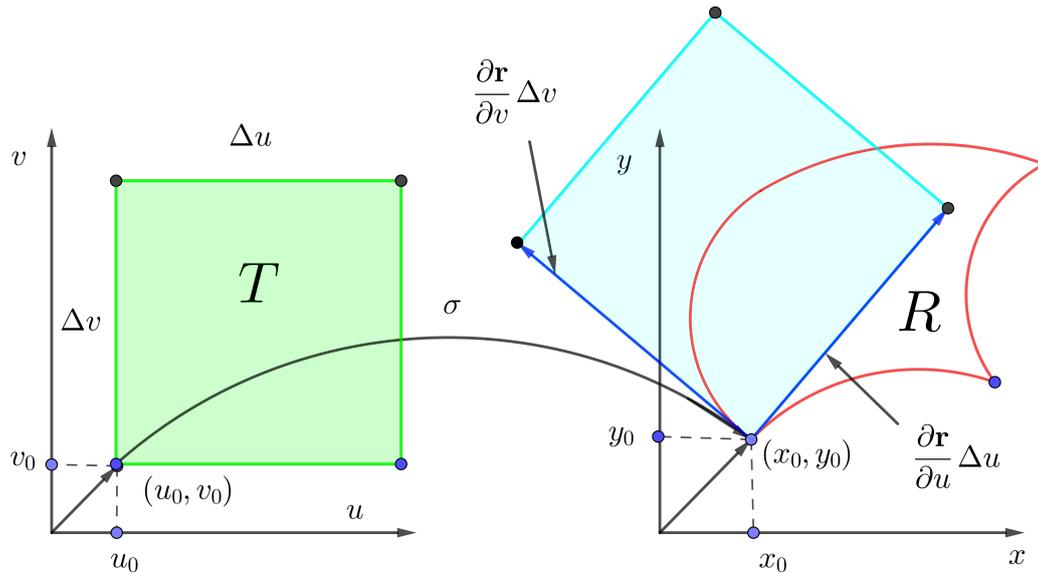


Figura 2.10: Deducción del Jacobiano

Siguiendo el procedimiento descrito en la Sección 2, esto es: subdividir la región ( $R$  en este caso) tal como lo indica la Figura 2.1, tomando un punto arbitrario dentro de cada subdivisión y evaluando la función  $f(x, y)$  en cada uno de ellos, la integral podía ser aproximada por sumas de Riemann (ver la Definición 2.1):

$$\iint_R f(x, y) dA \approx \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N f(x_{i,j}^*, y_{i,j}^*) \Delta x \Delta y$$

Aplicando el cambio de variables del dominio:

$$\Delta A = \Delta x \Delta y = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v$$

La integral con cambio de variables resulta:

$$\iint_R f(x, y) dA \approx \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N f[x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v$$

Tomando límite cuando  $M, N \rightarrow \infty$ , las sumatorias se convierten en integrales:

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{M, N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N f[x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v$$

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_S f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

#### 2.4.1. Coordenadas polares

Un cambio de coordenadas muy utilizado en diferentes ramas de la ingeniería es de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. Como se vió anteriormente, los cambios

de coordenadas son útiles cuando transforman uno o ambos límites en valores constantes, con lo cual vuelven más sencillo el proceso de integración.

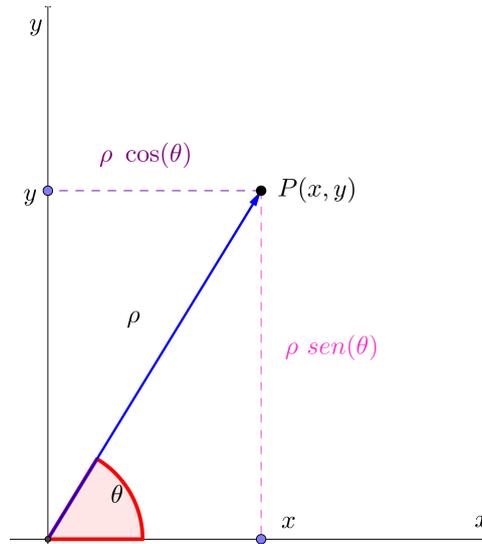


Figura 2.11: Coordenadas polares

En este caso, como se ve en la Figura 2.11, la transformación  $\sigma$  se encuentra dada por:

$$\sigma : \begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \text{sen}(\theta) \end{cases}$$

El Jacobiano de la transformación se obtiene aplicando la ecuación hallada en la Definición 2.3:

$$J(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial [\rho \cos(\theta)]}{\partial \rho} & \frac{\partial [\rho \text{sen}(\theta)]}{\partial \rho} \\ \frac{\partial [\rho \cos(\theta)]}{\partial \theta} & \frac{\partial [\rho \text{sen}(\theta)]}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\rho \text{sen}(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{vmatrix}$$

$$J(\rho, \theta) = \rho \cos^2(\theta) + \rho \text{sen}^2(\theta) = \rho$$

Por lo tanto, el diferencial de área para el cambio a coordenadas polares resulta:

$$dA = dx \, dy = \rho \, d\rho \, d\theta$$

### Ejemplo 2.3

Calcular el área de la Figura 2.12 que responde a la ecuación  $x^2 + y^2 = R^2$ .

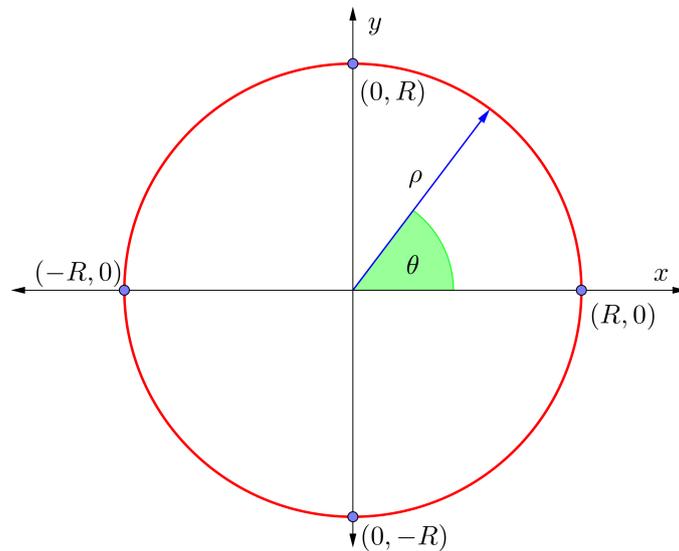


Figura 2.12: Ejemplo coordenadas polares

Debido a que se trata de un recinto circular, es apropiado el cambio de coordenadas cartesianas a polares:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \operatorname{sen}(\theta) \\ J = \rho \end{cases}$$

La variación del nuevo parámetro  $\rho$  es  $0 \leq \rho \leq R$  ec. de la circunferencia. La circunferencia en coordenadas cartesianas tiene por ecuación:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Aplicando el cambio de coordenadas:

$$[\rho \cos(\theta)]^2 + [\rho \operatorname{sen}(\theta)]^2 = R^2$$

$$\rho^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \operatorname{sen}^2(\theta) = R^2$$

$$\rho^2 [\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)] = R^2$$

$$\rho^2 = R^2 \rightarrow \rho = R$$

Por lo tanto, la variación de  $\rho$  resulta:

$$0 \leq \rho \leq R$$

La variación del ángulo  $\theta$  se obtiene observando la Figura 2.12. El ángulo  $\theta = 0$  se obtiene cuando el radio vector  $\rho$  coincide con la rama positiva del eje  $x$  y se mide

en sentido contrario a las agujas del reloj. Por lo tanto, la variación del ángulo para describir la circunferencia completa es  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . La integral para determinar el área es:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$A = \int_0^{2\pi} \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^R d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\theta$$

$$A = \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{R^2}{2} \theta \Big|_0^{2\pi} = \pi R^2$$

El cual coincide con el resultado que se conocía por geometría.

### 2.4.2. Coordenadas polares generalizadas

El cambio de coordenadas visto en la Sección 2.4.1, es un caso particular de las coordenadas polares generalizadas, ya que las anteriores solamente servían para recintos de integración circulares.

Las coordenadas polares generalizadas sirven para transformar tanto recintos circulares como elípticos, en los cuales existen dos semiejes diferentes,  $a$  y  $b$  (ver Figura 2.13).

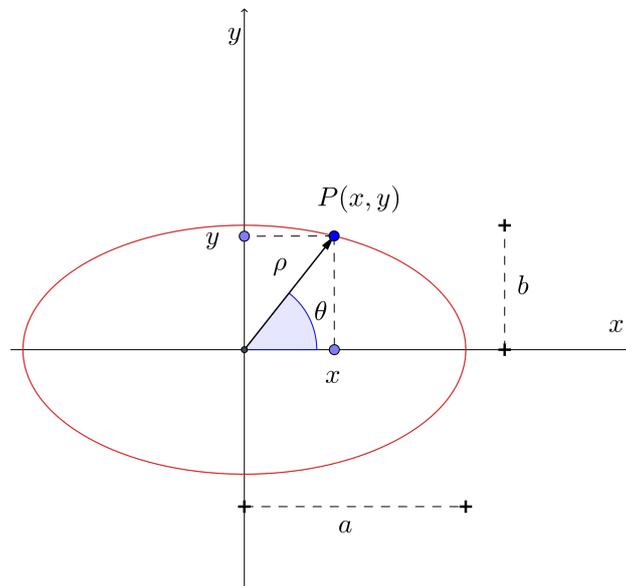


Figura 2.13: Coordenadas polares generalizadas

La transformación  $\sigma$  está dada por:

$$\sigma : \begin{cases} \frac{x}{a} = \rho \cos(\theta) \\ \frac{y}{b} = \rho \operatorname{sen}(\theta) \end{cases}$$

Para obtener el Jacobiano, se aplica la Definición 2.3:

$$J(\rho, \theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial [a \rho \cos(\theta)]}{\partial \rho} & \frac{\partial [b \rho \operatorname{sen}(\theta)]}{\partial \rho} \\ \frac{\partial [a \rho \cos(\theta)]}{\partial \theta} & \frac{\partial [b \rho \operatorname{sen}(\theta)]}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos(\theta) & b \operatorname{sen}(\theta) \\ -a \rho \operatorname{sen}(\theta) & b \rho \cos(\theta) \end{vmatrix}$$

$$J(\rho, \theta) = a b \rho \cos^2(\theta) + a b \rho \operatorname{sen}^2(\theta) = a b \rho$$

Por lo tanto, el diferencial de área para el cambio de coordenadas polares generalizadas resulta:

$$dA = dx dy = a b \rho d\rho d\theta$$

### Ejemplo 2.4

Calcular el área de la Figura 2.14 que responde a la ecuación  $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ .

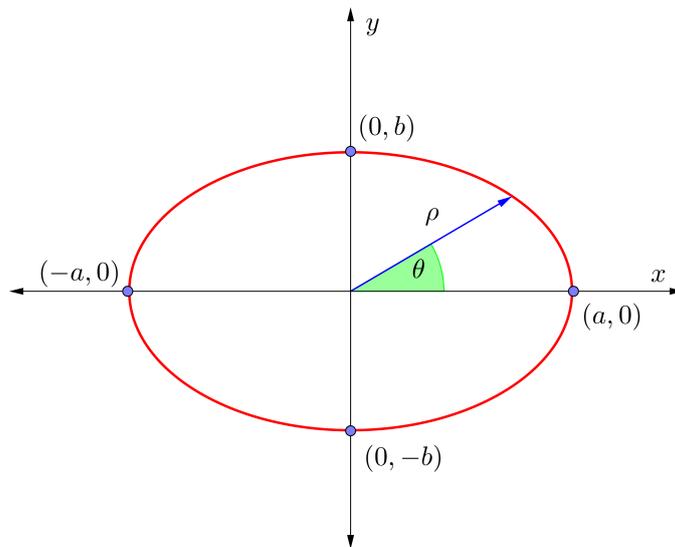


Figura 2.14: Ejemplo coordenadas polares generalizadas

Debido a que se trata de un recinto elíptico, es apropiado el cambio de coordenadas cartesianas a polares generalizadas:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \rho \cos(\theta) \\ \frac{y}{b} = \rho \operatorname{sen}(\theta) \\ J = ab\rho \end{cases}$$

La variación del parámetro  $\rho$  es  $0 \leq \rho \leq 1$ :

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Aplicando el cambio de coordenadas cartesianas a polares generalizadas:

$$[\rho \cos(\theta)]^2 + [\rho \operatorname{sen}(\theta)]^2 = 1$$

$$\rho^2 \cos^2(\theta) + \rho^2 \operatorname{sen}^2(\theta) = 1$$

$$\rho^2 [\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)] = 1$$

$$\rho^2 = 1 \rightarrow \rho = 1$$

Por lo tanto, la variación de  $\rho$  resulta:

$$0 \leq \rho \leq 1$$

La variación del ángulo  $\theta$  se obtiene observando la Figura 2.14. El ángulo  $\theta = 0$  se obtiene cuando el radio vector  $\rho$  coincide con la rama positiva del eje  $x$  y se mide en sentido contrario a las agujas del reloj. Por lo tanto, la variación del ángulo para describir la elipse completa es  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . La integral para determinar el área es:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 ab\rho \, d\rho \, d\theta$$

$$A = ab \int_0^{2\pi} \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^1 d\theta = ab \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta$$

$$A = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{ab}{2} \theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{ab}{2} 2\pi = ab\pi$$

El cual coincide con el resultado que se conocía por geometría.

## 2.5. Aplicaciones

Hasta ahora se han utilizado las integrales dobles para cálculos de áreas planas (con el integrando igual a 1) y volúmenes (con el integrando igual a  $z = f(x, y)$ ). En esta sección se presentarán otras aplicaciones de integrales dobles.

### 2.5.1. Masa de una lámina

Sea  $\delta(x, y)$  la función de densidad (en unidades de masa sobre unidades de área) de un determinado material, del cual se encuentra constituida una lámina (una lámina es un sólido en el cual dos dimensiones predominan sobre una tercera, por ejemplo una hoja de

papel). La masa de una lámina de área  $R$  se calculará como:

$$m = \iint_R \delta(x, y) dx dy$$

En el caso que la densidad sea constante, esto es  $\delta(x, y) = C$ , la masa de la lámina resultará:

$$m = \iint_R \delta(x, y) dx dy = C \iint_R dx dy = C R$$

Siendo  $R$  el área de la lámina.

### Ejemplo 2.5

Determinar la masa de la lámina de la Figura 2.15. Considerar una densidad por unidad de área igual a  $\delta(x, y) = x + y$ .

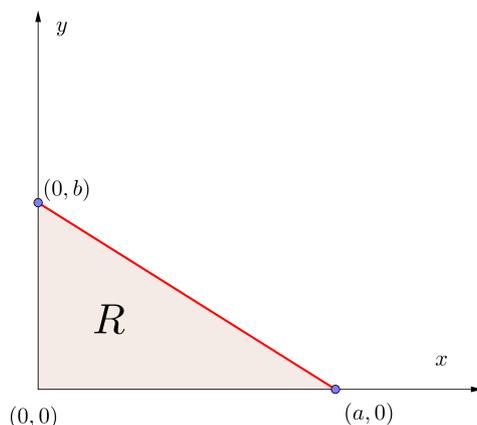


Figura 2.15: Ejemplo masa de una lámina

La expresión para determinar la masa de una lámina de densidad  $\delta(x, y)$  es:

$$m = \iint_R \delta(x, y) dx dy$$

Se planteará el cálculo del área de  $R$  considerando a  $x$  como constante. Los límites de ambas variables resultan:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq a \\ 0 &\leq y \leq b - \frac{b}{a}x \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación para hallar la masa:

$$m = \int_0^a \int_0^{b - \frac{b}{a}x} (x + y) dy dx$$

Se integra primero con respecto a  $y$ :

$$m = \int_0^a \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{b-(b/a)x} dx = \int_0^a \left( bx - \frac{bx^2}{a} + \frac{b^2}{2} - \frac{b^2x}{a} + \frac{b^2x^2}{2a^2} \right) dx$$

Integrando con respecto a  $x$ :

$$m = \left[ \frac{bx^2}{2} - \frac{bx^3}{3a} + \frac{b^2x}{2} - \frac{b^2x^2}{2a} + \frac{b^2x^3}{6a^2} \right]_0^a$$

Reemplazando entre los extremos y operando:

$$m = \frac{a^2b + ab^2}{6}$$

### 2.5.2. Centro de gravedad de una lámina

En dos dimensiones, los centros de gravedad de las figuras tienen dos coordenadas. Por lo tanto, hallar el centro de gravedad de una lámina implica encontrar las dos coordenadas de ese punto.

Se define como coordenada  $x$  y se denota como  $\bar{x}$  del centro de gravedad de una lámina de densidad  $\delta(x, y)$  y área  $R$  a la expresión:

$$\bar{x} = \frac{\iint_R \delta(x, y) x \, dx \, dy}{\iint_R \delta(x, y) \, dx \, dy} = \frac{\iint_R \delta(x, y) x \, dx \, dy}{m}$$

Análogamente, se define a la coordenada  $y$  del centro de gravedad ( $\bar{y}$ ) como la expresión:

$$\bar{y} = \frac{\iint_R \delta(x, y) y \, dx \, dy}{\iint_R \delta(x, y) \, dx \, dy} = \frac{\iint_R \delta(x, y) y \, dx \, dy}{m}$$

#### Ejemplo 2.6

Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la lámina presentada en la Figura 2.15.

En este ejemplo se determinará solamente la coordenada  $\bar{x}$  del centro de gravedad, quedando para el alumno la determinación de  $\bar{y}$ . La expresión para determinar la coordenada  $\bar{x}$  es:

$$\bar{x} = \frac{\iint_R \delta(x, y) x \, dx \, dy}{\iint_R \delta(x, y) \, dx \, dy} = \frac{\iint_R \delta(x, y) x \, dx \, dy}{m} = \frac{\int_0^a \int_0^{b-(b/a)x} (x + y) x \, dy \, dx}{m}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \int_0^{b-(b/a)x} (x^2 + xy) dy dx}{m} = \frac{\int_0^a \left[ x^2 y + \frac{xy^2}{2} \right]_0^{b-(b/a)x} dx}{m}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \left[ x^2 \left( b - \left( \frac{b}{a} \right) x \right) + \frac{x \left( b - \left( \frac{b}{a} \right) x \right)^2}{2} \right] dx}{m} = \frac{\int_0^a \left( bx^2 - \frac{b}{a} x^3 + \frac{b^2 x}{2} - \frac{b^2 x^2}{a} + \frac{b^2 x^3}{2a^2} \right) dx}{m}$$

Integrando con respecto a  $x$ :

$$\bar{x} = \frac{\left[ \frac{bx^3}{3} - \frac{bx^4}{4a} + \frac{b^2 x^2}{4} - \frac{b^2 x^3}{3a} + \frac{b^2 x^4}{8a^2} \right]_0^a}{m}$$

Del ejemplo anterior, se sabe que la masa de la lámina es  $m = \frac{a^2 b + ab^2}{6}$ , por lo tanto la coordenada  $\bar{x}$  del centro de gravedad será:

$$\bar{x} = \frac{2a^3 b + a^2 b^2}{4a^2 b + 4ab^2}$$

### 2.5.3. Momento de inercia de una lámina

Considerando una recta cualquiera  $L$  contenida en el plano de la lámina  $R$ , de densidad  $\delta(x, y)$  y siendo  $d(x, y)$  la distancia de un punto  $(x, y)$  a  $L$ , se define como momento de inercia de la lámina  $R$  con respecto a la recta  $L$  a la expresión:

$$I_L = \iint_R d(x, y)^2 \delta(x, y) dx dy$$

En vez de considerar una recta genérica  $L$ , se toman los ejes coordenados  $x$  y  $y$ , se obtienen los momentos de inercia de la lámina con respecto a los ejes  $x$  y  $y$ , respectivamente:

$$I_x = \iint_R y^2 \delta(x, y) dx dy$$

$$I_y = \iint_R x^2 \delta(x, y) dx dy$$

#### Ejemplo 2.7

Determinar el momento de inercia de la lámina mostrada en la Figura 2.16 con respecto al eje  $x$ .

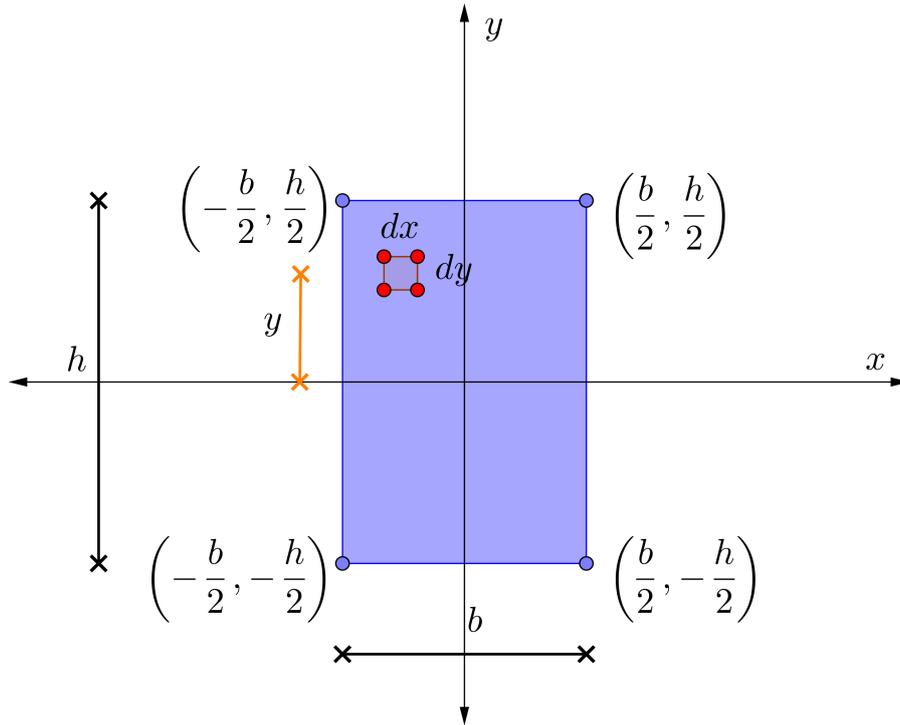


Figura 2.16: Ejemplo momento de inercia con respecto al eje  $x$

La expresión para determinar el momento de inercia con respecto al eje  $x$  es:

$$I_x = \iint_R y^2 \delta(x, y) dx dy$$

Los límites en este caso son constantes, y se pidió considerar  $\delta(x, y) = 1$ , por lo que la integral resulta:

$$I_x = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy dx = \int_{-b/2}^{b/2} \left. \frac{y^3}{3} \right|_{-h/2}^{h/2} dx$$

$$I_x = \int_{-b/2}^{b/2} \frac{h^3}{12} dx = \frac{h^3}{12} x \Big|_{-b/2}^{b/2}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

Resultado conocido de resistencia de materiales como el momento de inercia de una viga rectangular, de dimensiones  $b$  por  $h$ . Se deja al estudiante el cálculo del momento de inercia con respecto al eje  $y$ .

### 3. Integrales triples

Haciendo una analogía al desarrollo hecho en la Sección 2, es posible resumir en cinco pasos la definición de una integral triple: Sea  $f(x, y, z)$  una función definida y acotada en

el cubo  $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$  (Figura 3.1). Este cubo será el dominio de integración, cuya definición es análoga a la Definición 2.1:

**Definición 3.1**

Se denomina **dominio de integración** al cubo  $R$  definido como:

$$R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$$

Como se procedió para funciones de dos variables, este dominio de integración se subdividirá en  $M \times N \times O$  subrectángulos, de volumen  $R_{ijk}$ . Las dimensiones de los cubos serán  $\Delta x = (b - a)/M$ ,  $\Delta y = (d - c)/N$  y  $\Delta z = (f - e)/O$ .

Si la función  $f(x, y, z)$  se evalúa en un punto arbitrario  $(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*)$  de cada subregión, se multiplica por su volumen  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  y se suman las  $M \times N \times O$  particiones, se obtiene la suma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^O F(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta x \Delta y \Delta z$$

Si el número de subdivisiones tiende a infinito, surge una nueva definición:

**Definición 3.2**

La integral triple de la función  $F(x, y, z)$ , definida y acotada en un dominio de integración  $R \subseteq \mathbb{R}^3$ , resulta:

$$\iiint_R F(x, y, z) dx dy dz = \lim_{m, n, o \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^O F(x_{ijk}^*, y_{ijk}^*, z_{ijk}^*) \Delta x \Delta y \Delta z$$

Si este límite existe.

Las funciones con las que se trabajará reunirán los siguientes requisitos:

- Toda recta paralela al eje  $z$  trazada por un punto interior del dominio  $R$  (punto que no pertenece a la frontera), corta a la superficie en dos puntos.
- Todo el dominio  $R$  puede proyectarse sobre algún plano coordenado (por ejemplo el  $xy$ ) resultando un dominio regular (bidimensional)  $D$  (ver la Figura 3.2)

Figura 3.1: Dominio de integración  $\subseteq \mathbb{R}^3$

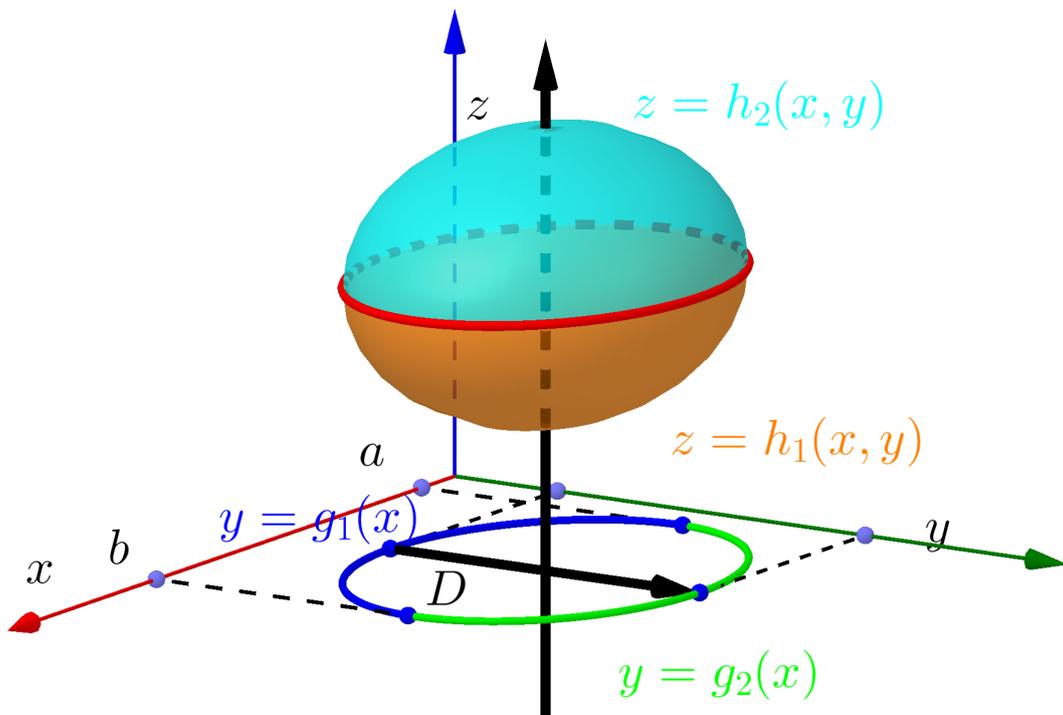


Figura 3.2: Planteo del cálculo de volumen con integrales triples

Como se vió en la Sección 2.2, si el dominio de integración no está limitado por planos paralelos a los coordenados, sino por funciones arbitrarias (ver la Figura 2.6), la integral

triple se calcula como:

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} F(x, y, z) dz dy dx$$

Donde  $g_1(x)$  y  $g_2(x)$  son funciones que forman parte del contorno de la proyección del volumen sobre un plano coordenado (en este caso el  $xy$ );  $z = h_1(x, y)$  y  $z = h_2(x, y)$  son las funciones que limitan el sólido (ver Figura 3.2). En particular, si la función  $F(x, y, z) = 1$  el resultado de la integral será igual al volumen del dominio (que en este caso se trata de un sólido).

### Ejemplo 3.1

Calcular el volumen del sólido mostrado en la Figura 3.3, limitado por los planos  $x/a + z/c = 1$ ,  $0 \leq y \leq b$  y los planos coordenados.

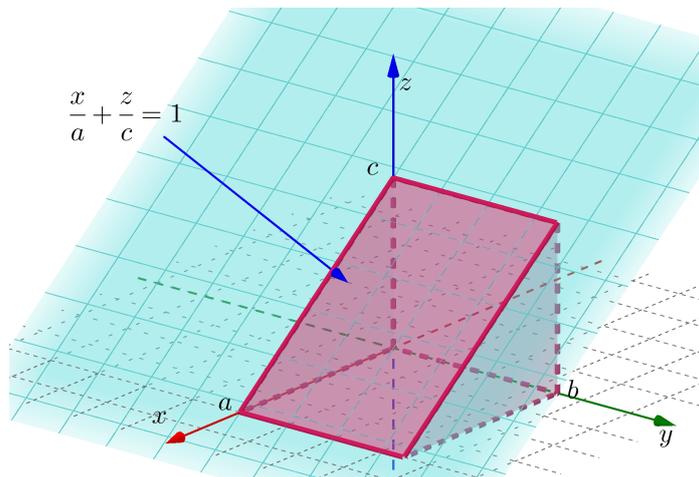


Figura 3.3: Ejemplo del cálculo de volumen con integrales triples

Como debe calcularse el volumen de la cuña, en la expresión de integrales triples se tiene que cumplir  $F(x, y, z) = 1$ . Los límites de las variables son:  $0 \leq x \leq a$ ;  $0 \leq y \leq b$  y  $0 \leq z \leq c - \frac{c}{a}x$ .

El volumen se obtiene al resolver la siguiente integral:

$$V = \iiint_R dx dy dz = \int_0^a \int_0^b \int_0^{c-(c/a)x} dz dy dx$$

$$V = \int_0^a \int_0^b \left[ c - \frac{c}{a}x \right] dy dx = \int_0^a \left[ cy - \frac{c}{a}xy \right]_0^b dx$$

$$V = \int_0^a \left[ bc - \frac{bc}{a}x \right] dx = \left[ bcx - \frac{bcx^2}{2a} \right]_0^a = abc - \frac{abc}{2} = \frac{abc}{2}$$

Resultado que coincide con la fórmula del volumen de un prisma:  $V = \text{sup. base} \times \text{altura}$ .

### 3.1. Cambio de coordenadas en integrales triples

Al igual que en integrales dobles, un cambio de coordenadas en integrales triples viene dado por el siguiente teorema:

#### Teorema 3.1

Sea  $f = f(x, y, z)$  integrable en  $R \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $\sigma$  una aplicación uno a uno tal que  $\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$$\sigma = \begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

Tal que el Jacobiano  $J(u, v, w)$  sea distinto de cero para todo punto  $(u, v, w) \in \sigma^{-1}(R) = T$ , entonces se verifica:

$$\iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_T f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] |J(u, v, w)| \, du \, dv \, dw$$

El Jacobiano en integrales dobles representaba un factor de proporcionalidad entre áreas en diferentes sistemas de coordenadas. En integrales triples representará un factor de proporcionalidad entre volúmenes. De acuerdo a la expresión anterior, el diferencial de volumen en el sistema cartesiano  $dV = dx \, dy \, dz$  se transformará en  $dV = |J(u, v, w)| \, du \, dv \, dw$ .

El Jacobiano se calcula como el producto mixto:

$$|J(u, v, w)| = \left| \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} \right| \, du \, dv \, dw$$

siendo los vectores:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}$$

El Jacobiano resulta:

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

A continuación, se presentan dos sistemas de coordenadas curvilíneas importantes.

### 3.1.1. Coordenadas cilíndricas

Estas coordenadas son una extensión de las polares al espacio. Un punto se define en  $\mathbb{R}^3$  a través de la siguiente transformación (vea la Figura 3.4):

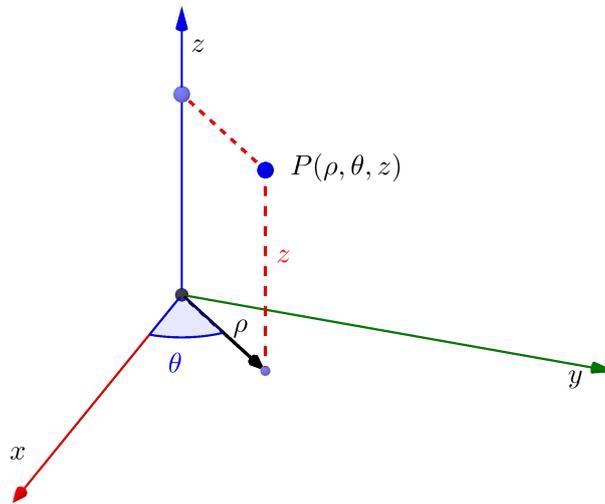


Figura 3.4: Descripción de un punto en coordenadas cilíndricas

$$\sigma = \begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \operatorname{sen}(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

La variación de los parámetros es (Figura 3.4):

$$\begin{aligned} 0 &\leq \theta \leq 2\pi \\ \rho &\geq 0 \end{aligned}$$

La transformación, mediante la aplicación  $\sigma$ , del diferencial de volumen se puede observar en la Figura 3.5.

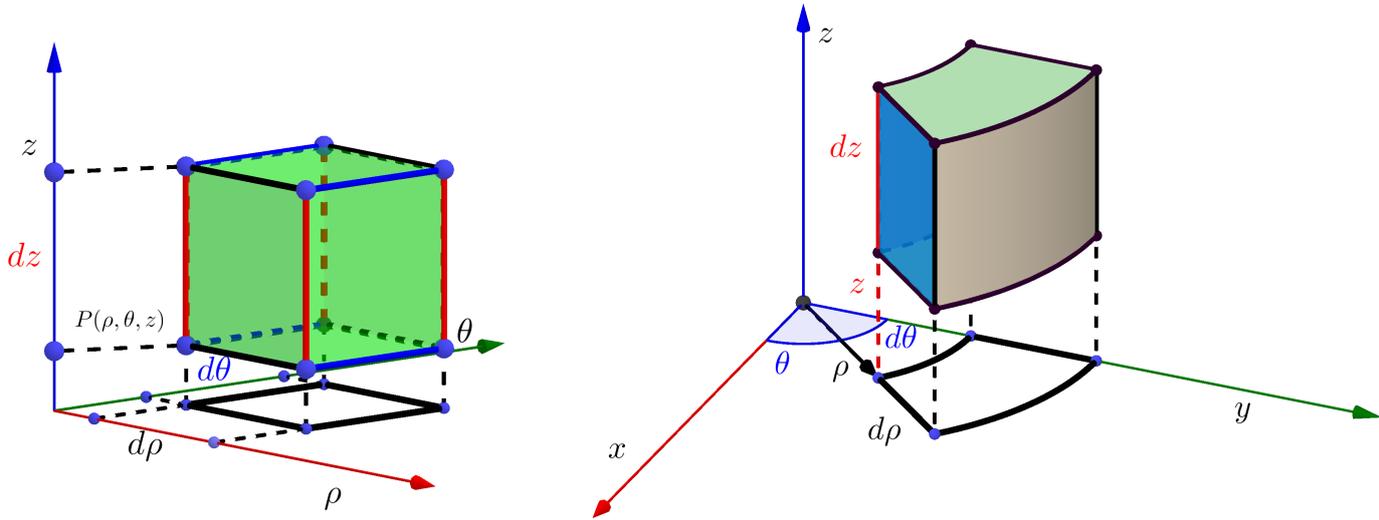


Figura 3.5: Diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas

Aplicando el Teorema 3.1 visto anteriormente, se calcula el Jacobiano resolviendo el siguiente determinante:

$$J(\rho, \theta, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\rho \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

$$\iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_T f[\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z] \rho \, d\rho \, d\theta \, dz$$

### Ejemplo 3.2

Calcular el volumen de la superficie mostrada en la Figura 3.6. La misma se encuentra acotada entre la función  $z = c - x^2 - y^2$  y el plano  $z = k$ , con  $k < c$

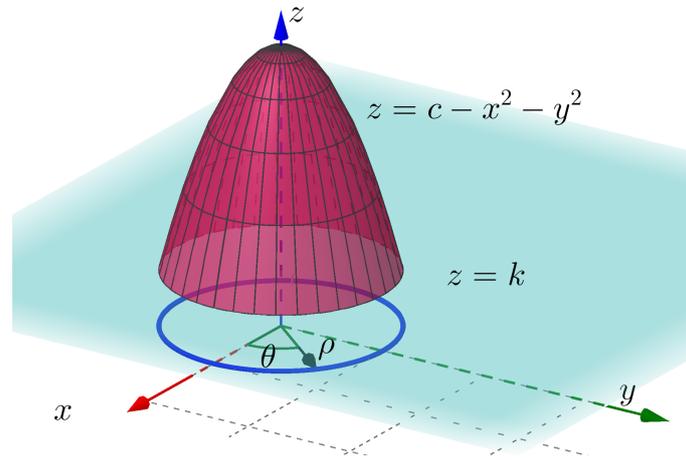


Figura 3.6: Ejemplo cálculo de volumen en coordenadas cilíndricas

Se plantea el cambio de coordenadas cartesianas a cilíndricas. Esto implica:

$$\text{cambio de coordenadas : } \begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \text{sen}(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

El Jacobiano para este cambio de coordenadas es  $J = \rho$ . La ecuación del paraboloides en coordenadas cilíndricas se obtiene reemplazando el cambio de coordenadas en la expresión de la superficie:

$$z = c - x^2 - y^2 \rightarrow z = c - [\rho \cos(\theta)]^2 - [\rho \text{sen}(\theta)]^2 = c - \rho^2 [\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta)]$$

$$z = c - \rho^2$$

El máximo valor de  $\rho$  se obtiene al reemplazar  $z$  por el valor de  $k$  en la expresión de la superficie, ya que es la altura de corte que genera la proyección de mayor tamaño sobre el plano  $xy$ :

$$k = c - [\rho \cos(\theta)]^2 - [\rho \text{sen}(\theta)]^2 \rightarrow \rho = \sqrt{c - k}$$

La variación del ángulo  $\theta$  se obtiene observando la Figura 3.6. Como la circunferencia está completa, se tiene que  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Una vez encontrados los límites de integración, se procede a plantear la integral triple:

$$V = \iiint_R dx \, dy \, dz \rightarrow \iiint_T |J| \, dz \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{c-k}} \int_k^{c-\rho^2} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{c-k}} (c - \rho^2 - k) \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{c-k}} (c\rho - \rho^3 - k\rho) d\rho d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{c\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} - \frac{k\rho^2}{2} \right]_0^{\sqrt{c-k}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{(c-k)^2}{4} d\theta = \frac{(c-k)^2}{4} \theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(c-k)^2\pi$$

### 3.1.2. Coordenadas esféricas

Como su nombre lo indica, estas coordenadas son aptas para utilizar en superficies esféricas. Un punto se define en  $\mathbb{R}^3$  a través de la siguiente transformación (vea la Figura 3.7):

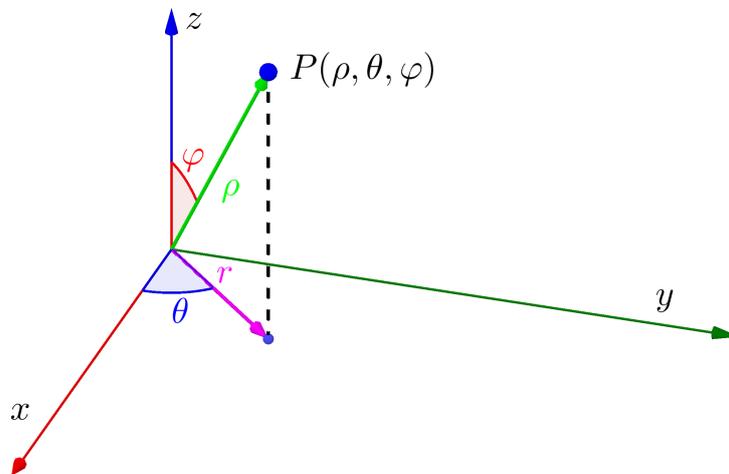


Figura 3.7: Descripción de un punto en coordenadas esféricas

$$\sigma = \begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) \\ y = \rho \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) \\ z = \rho \cos(\varphi) \end{cases}$$

La variación de los parámetros es (Figura 3.7):

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$\rho \geq 0$$

La transformación, mediante la aplicación  $\sigma$ , del diferencial de volumen se puede observar en la Figura 3.8.

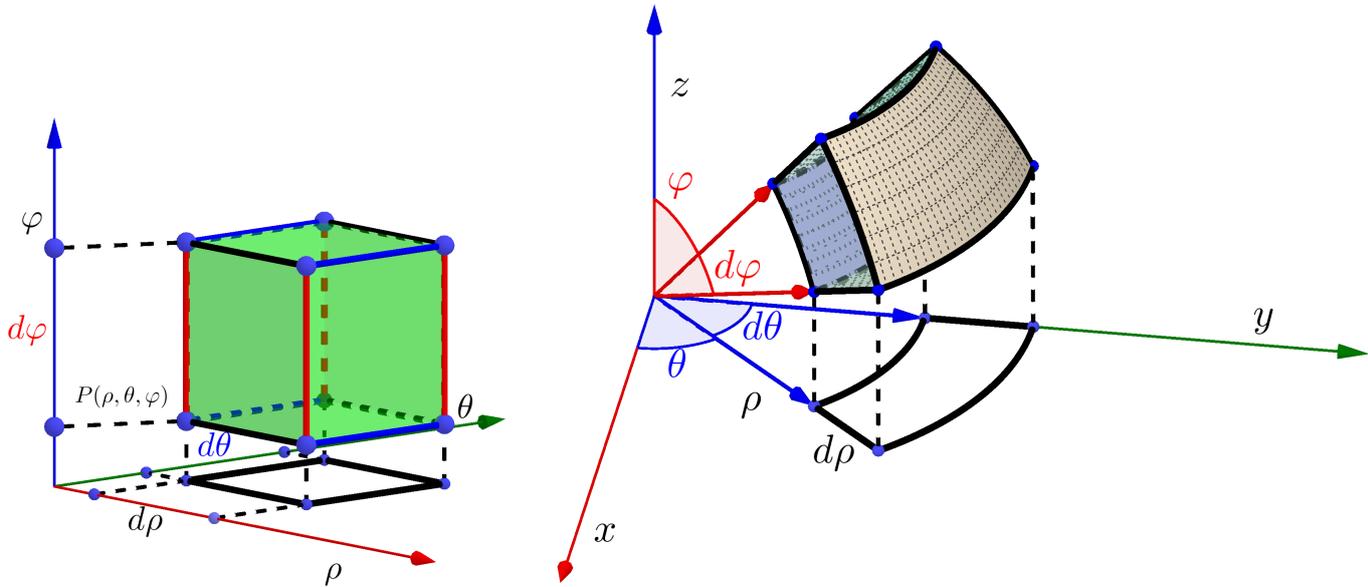


Figura 3.8: Diferencial de volumen en coordenadas esféricas

Aplicando el Teorema 3.1 visto anteriormente, se calcula el Jacobiano resolviendo el siguiente determinante:

$$J(\rho, \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) & \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) & \cos(\varphi) \\ -\rho \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) & \rho \cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) & 0 \\ \rho \cos(\theta) \cos(\varphi) & \rho \operatorname{sen}(\theta) \cos(\varphi) & -\rho \operatorname{sen}(\varphi) \end{vmatrix} = \rho^2 \operatorname{sen}(\varphi)$$

$$\iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_T f[\rho \cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), \rho \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), \rho \cos(\varphi)] \rho^2 \operatorname{sen}(\varphi) \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

### Ejemplo 3.3

Calcular el volumen encerrado entre  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ ,  $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$  y el plano  $z = 0$ . Esto se muestra en la Figura 3.9.

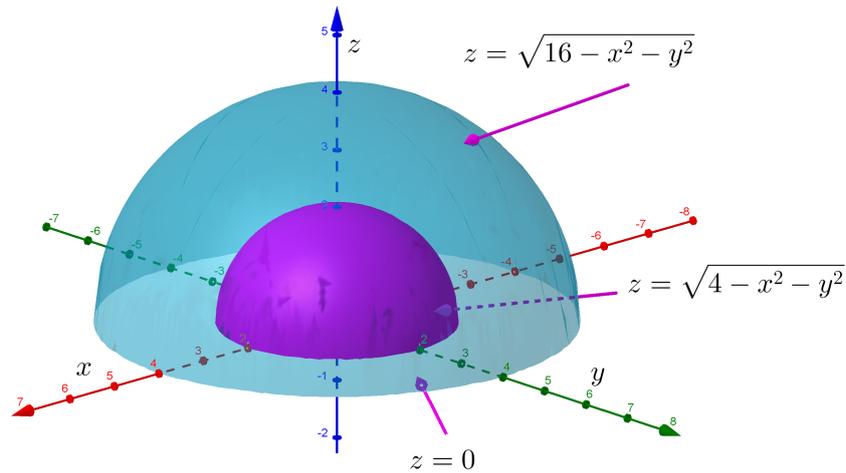


Figura 3.9: Ejemplo cálculo de volumen en coordenadas esféricas

Se plantea el cambio de coordenadas cartesianas a esféricas. Esto implica:

$$\text{cambio de coordenadas : } \begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) \\ y = \rho \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) \\ z = \rho \cos(\varphi) \end{cases}$$

El Jacobiano para este cambio de coordenadas es  $J = \rho^2 \operatorname{sen}(\varphi)$ .

La ecuación de la esfera en coordenadas esféricas se obtiene reemplazando el cambio de coordenadas en la expresión de la superficie (se hará considerando a las esferas completas y luego se limitarán los parámetros angulares correspondientes para considerar solamente la mitad):

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \rightarrow [\rho \cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi)]^2 + [\rho \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi)]^2 + [\rho \cos(\varphi)]^2 = R^2$$

$$\rho^2 \cos^2(\theta) \operatorname{sen}^2(\varphi) + \rho^2 \operatorname{sen}^2(\theta) \operatorname{sen}^2(\varphi) + \rho^2 \cos^2(\varphi) = R^2$$

$$\rho^2 \operatorname{sen}^2(\varphi) \underbrace{[\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)]}_1 + \rho^2 \cos^2(\varphi) = R^2$$

$$\rho^2 \underbrace{[\operatorname{sen}^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)]}_1 = R^2 \rightarrow \rho = R$$

Esto indica que  $\rho$  variará entre el radio de la esfera interior y el radio de la exterior, es decir  $2 \leq \rho \leq 4$ .

La variación del ángulo  $\theta$  se obtiene observando la Figura 3.9. Como la circunferencia que está contenida en el plano  $xy$  es completa, se tiene que  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Resta encontrar la variación de  $\varphi$ . Como se trata de medias esferas, es lógico pensar que la variación de este ángulo será  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

Una vez encontrados los límites de integración, se procede a plantear la integral triple:

$$V = \iiint_R dx \, dy \, dz \rightarrow \iiint_T |J| \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_2^4 \rho^2 \sin(\varphi) d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left. \frac{1}{3} \rho^3 \right|_2^4 \sin(\varphi) \, d\varphi \, d\theta$$

$$V = \frac{56}{3} \int_0^{2\pi} -\cos(\varphi) \Big|_0^{\pi/2} \, d\theta$$

$$V = \frac{56}{3} \theta \Big|_0^{2\pi} = \frac{112}{3} \pi$$

## 3.2. Aplicaciones

Sea la integral triple:

$$\iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Anteriormente se vió que si el integrando  $f(x, y, z)$  era igual a 1, el resultado de la integral representaba el volumen de la región  $R$ .

Ahora se considerará al integrando diferente a 1. Por ejemplo, si  $f(x, y, z)$  es una densidad volumétrica, el resultado de la integral será la masa del sólido  $R$ .

Además de la masa, existen diferentes cantidades que pueden calcularse utilizando integrales triples, tales como el centro de gravedad, momento de inercia de un sólido, entre otras.

### 3.2.1. Masa de un sólido

Sea  $\delta(x, y, z)$  la función de densidad (en unidades de masa sobre unidades de volumen) de un determinado material, del cual se encuentra constituido un sólido. La masa de un sólido de volumen  $R$  se calculará como:

$$M = \iiint_R \delta(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

En el caso que la densidad sea constante, esto es  $\delta(x, y, z) = C$ , la masa del sólido resultará:

$$M = \iiint_R \delta(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = C \iiint_R dx \, dy \, dz = C R$$

Siendo  $R$  el volumen del sólido en cuestión.

### 3.2.2. Centro de gravedad de un sólido

En tres dimensiones, los centros de gravedad de los sólidos tienen tres coordenadas. Por lo tanto, hallar el centro de gravedad de un sólido implica encontrar las tres coordenadas de ese punto.

Se define como coordenada  $x$  y se denota como  $x_{CG}$  del centro de gravedad de un sólido de densidad  $\delta(x, y, z)$  y volumen  $R$  a la expresión:

$$x_{CG} = \frac{\iiint_R \delta(x, y, z) x \, dx \, dy \, dz}{\iiint_R \delta(x, y, z) \, dx \, dy \, dz} = \frac{1}{M} \iiint_R \delta(x, y, z) x \, dx \, dy \, dz$$

Análogamente, se define a la coordenada  $y$  del centro de gravedad ( $y_{CG}$ ) como la expresión:

$$y_{CG} = \frac{\iiint_R \delta(x, y, z) y \, dx \, dy \, dz}{\iiint_R \delta(x, y, z) \, dx \, dy \, dz} = \frac{1}{M} \iiint_R \delta(x, y, z) y \, dx \, dy \, dz$$

Por último, se obtiene:

$$z_{CG} = \frac{\iiint_R \delta(x, y, z) z \, dx \, dy \, dz}{\iiint_R \delta(x, y, z) \, dx \, dy \, dz} = \frac{1}{M} \iiint_R \delta(x, y, z) z \, dx \, dy \, dz$$

### 3.2.3. Momento de inercia de un sólido

Considerando una recta cualquiera  $L$  contenida en un sólido  $R$ , de densidad  $\delta(x, y, z)$  y siendo  $d(x, y, z)$  la distancia de un punto  $(x, y, z)$  a  $L$ , se define como momento de inercia del sólido  $R$  con respecto a la recta  $L$  a la expresión:

$$I_L = \iiint_R d(x, y, z)^2 \delta(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

## 4. Bibliografía

1. Stewart, James. Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas. 8va edición. Año 2018.
2. Apostol, Tom. Calculus Volumen II. 2da edición. Editorial Reverté. Año 2002.
3. Larson, R. E., Edwards, B. H. Calculus. 9th Edition. Brooks/Cole Cengage Learning. Año 2010.
4. Dineen, S. Mutivariate Calculus and Geometry. Springer Undergraduate Mathematics Series. Año 2014.

5. Marsden, J., Tromba, A. Cálculo Vectorial. 3ra edición. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana. Año 1991
6. Apuntes de cátedra.