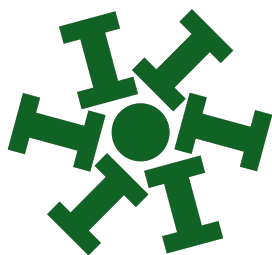


UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN JUAN



FACULTAD DE
INGENIERÍA

Departamento de Matemática

ANÁLISIS MATEMÁTICO II - CÁLCULO II

Ing. en Agrimensura - Ing. Civil - Ing. de Minas -
Ing. en Metalurgia Extractiva

INTEGRALES DE SUPERFICIE

Equipo de cátedra

Mg. Ing. Pablo G. Marcuzzi Naveda
Ing. Leandro Di Carlo

Dra. Ing. Cecilia Fernández
Dra. Ing. Celia Román

Año 2024

Índice

1	Introducción	3
2	Representación paramétrica de una superficie	3
3	Vector normal a una superficie	7
4	Diferencial de superficie	9
4.1	Diferencial de superficie en forma paramétrica	9
4.2	Diferencial de superficie en forma explícita	12
4.3	Obtención del dS en forma geométrica	13
5	Integrales de superficie para campos escalares	15
6	Integrales de superficie para campos vectoriales	17
6.1	Superficie orientada	17
6.2	Flujo	18
6.3	Divergencia de un campo vectorial	21
6.4	Rotor de un campo vectorial	24
6.5	Teorema de Gauss o de la divergencia	29
6.6	Teorema de Stokes	33
7	Bibliografía	38

1. Introducción

A diferencia de las vistas anteriormente, en este nuevo tipo de integrales, el **dominio de integración** es una **superficie**.

Debido a esto, se mostrarán las diferentes maneras de expresar una superficie:

- Forma explícita. Ejemplo: $z = f(x, y)$
- Forma implícita. Ejemplo: $F(x, y, z) = 0$
- Forma paramétrica o vectorial.

A continuación, y como analogía a las integrales de línea, se verán ejemplos de la tercera forma de expresar una superficie.

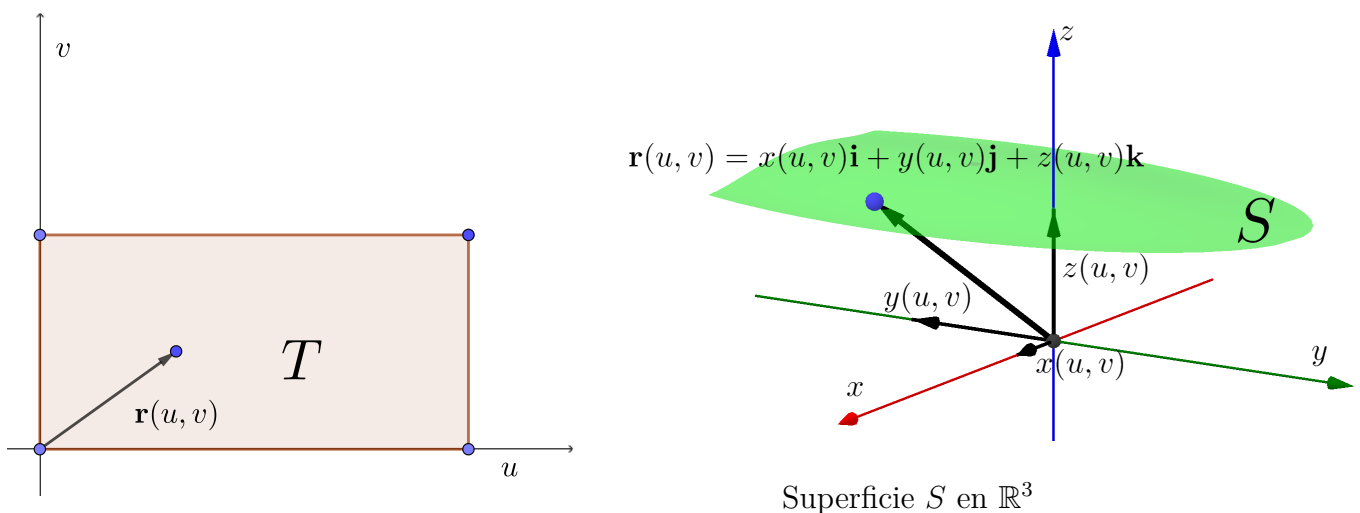
2. Representación paramétrica de una superficie

Una superficie alabeada contenida en \mathbb{R}^3 puede ser descrita punto a punto mediante un vector $\mathbf{r}(u, v)$. Para ello, se define:

Sea S una superficie que admite derivadas parciales continuas, definida en forma vectorial como:

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}$$

con $(u, v) \in T$.



Región T contenida en el plano uv

Figura 2.1: Mapeo desde el dominio uv en \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^3 mediante el vector \mathbf{r}

A continuación, se presentan ejemplos de parametrización de algunas superficies:

■ **Esfera**

Sea S la esfera de \mathbb{R}^3 (Figura 2.2), cuya ecuación es $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. La parametrización de S está dada por:

$$\mathbf{r}(u, v) : \begin{cases} x = R \cos(u) \operatorname{sen}(v) \\ y = R \operatorname{sen}(u) \operatorname{sen}(v) \\ z = R \cos(v) \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq u \leq 2\pi \text{ y } 0 \leq v \leq \pi$$

En forma vectorial:

$$\mathbf{r}(u, v) = R \begin{bmatrix} \cos(u) \operatorname{sen}(v) \\ \operatorname{sen}(u) \operatorname{sen}(v) \\ \cos(v) \end{bmatrix}$$

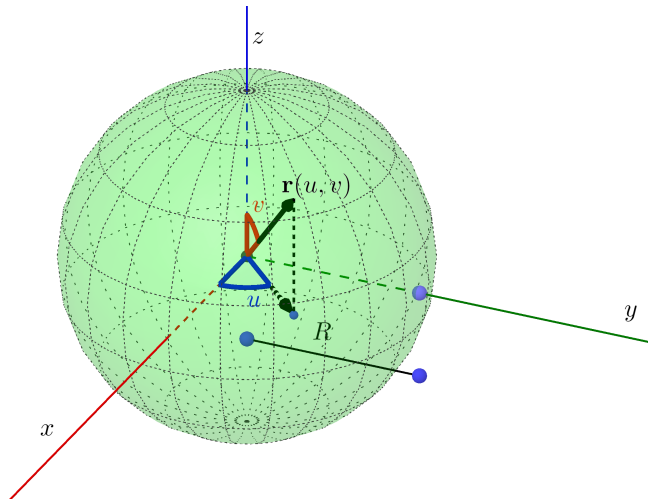


Figura 2.2: Parámetros de una esfera de radio R

■ **Elipsoide**

Sea S el elipsoide de \mathbb{R}^3 (Figura 2.3), cuya ecuación canónica es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

La parametrización de S está dada por:

$$\mathbf{r}(u, v) : \begin{cases} x = a \cos(u) \operatorname{sen}(v) \\ y = b \operatorname{sen}(u) \operatorname{sen}(v) \\ z = c \cos(v) \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi \text{ y } a, b, c \in \mathbb{R}$$

En forma vectorial:

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{bmatrix} a \cos(u) \operatorname{sen}(v) \\ b \operatorname{sen}(u) \operatorname{sen}(v) \\ c \cos(v) \end{bmatrix}$$

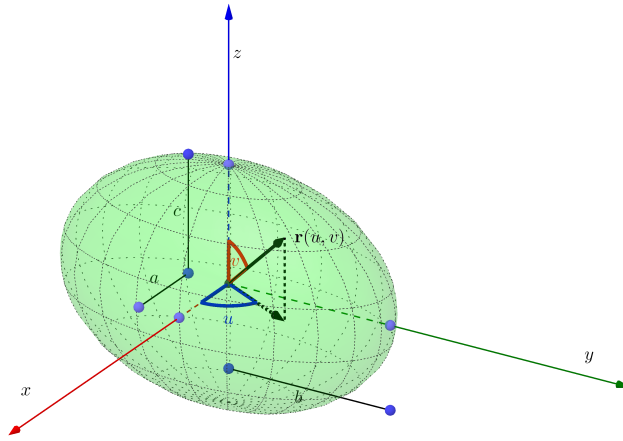


Figura 2.3: Parámetros de un elipsoide

■ **Paraboloide elíptico**

Sea S el paraboloide elíptico de \mathbb{R}^3 (Figura 2.4), cuya ecuación es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$. La parametrización de S está dada por:

$$\mathbf{r}(u, v) : \begin{cases} x = av \cos(u) \\ y = bv \sin(u) \\ z = cv^2 \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq u < 2\pi, 0 \leq v < \infty \text{ y } a, b, c \in \mathbb{R}$$

En forma vectorial:

$$\mathbf{r}(u, v) = v \begin{bmatrix} a \cos(u) \\ b \sin(u) \\ cv \end{bmatrix}$$

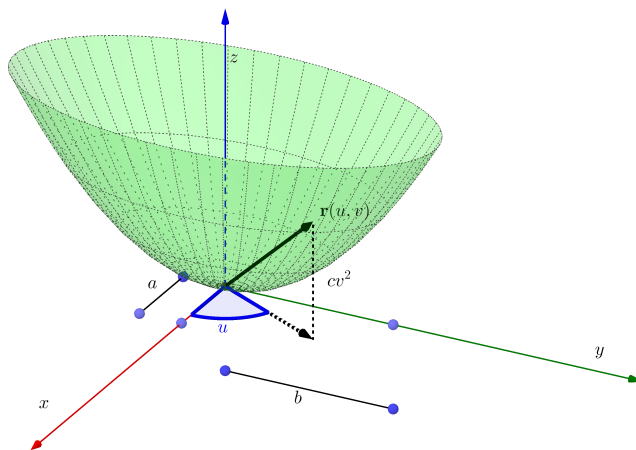


Figura 2.4: Parámetros de un paraboloide elíptico

■ **Cilindro elíptico**

Sea S el cilindro elíptico de \mathbb{R}^3 (Figura 2.5), cuya ecuación es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. La parametrización de S está dada por:

$$\mathbf{r}(u, v) : \begin{cases} x = a \cos(u) \\ y = b \sin(u) \\ z = v \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq u \leq 2\pi, a, b, c \text{ y } v \in \mathbb{R}$$

En forma vectorial:

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{bmatrix} a \cos(u) \\ b \sin(u) \\ v \end{bmatrix}$$

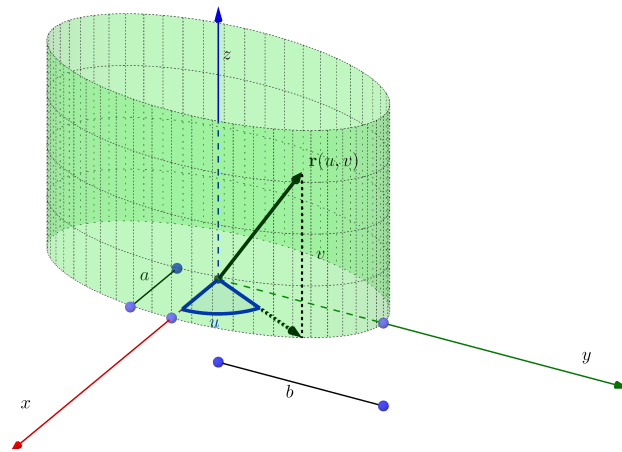


Figura 2.5: Parámetros de un cilindro elíptico

■ **Cono**

Sea S el cono de \mathbb{R}^3 (Figura 2.6), cuya ecuación es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$. La parametrización de S está dada por:

$$\mathbf{r}(u, v) : \begin{cases} x = av \cos(u) \\ y = bv \sin(u) \\ z = cv \end{cases} \quad \text{con } 0 \leq u \leq 2\pi, a, b, c \text{ y } v \in \mathbb{R}$$

En forma vectorial:

$$\mathbf{r}(u, v) = v \begin{bmatrix} a \cos(u) \\ b \sin(u) \\ c \end{bmatrix}$$

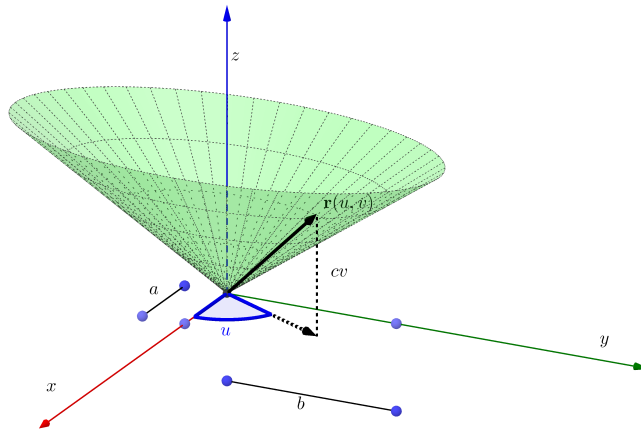


Figura 2.6: Parámetros de un cono elíptico

3. Vector normal a una superficie

Partiendo de la superficie parametrizada a través del vector $\mathbf{r}(u, v)$, las derivadas parciales de \mathbf{r} con respecto a las variables u y v son:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}$$

En forma vectorial:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Cada una de estas expresiones puede interpretarse geoméricamente como vectores tangentes a S . Si se mantiene $v = v_0$ (constante), entonces $\mathbf{r}(u, v_0)$ describirá la curva C_1 sobre la superficie S (vea la Figura 3.1).

El vector tangente a C_1 en el punto $[x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)]$ tiene la expresión:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|_{(u_0, v_0)} = \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_{(u_0, v_0)} \mathbf{i} + \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_{(u_0, v_0)} \mathbf{j} + \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_{(u_0, v_0)} \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix}_{(u_0, v_0)}$$

De la misma manera, si se mantiene $u = u_0$ (constante), el vector $\mathbf{r}(u_0, v)$ describirá la

curva C_2 sobre la superficie S . Su expresión en el punto $[x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)]$ es:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Big|_{(u_0, v_0)} = \frac{\partial x}{\partial v} \Big|_{(u_0, v_0)} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \Big|_{(u_0, v_0)} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \Big|_{(u_0, v_0)} \mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \Big|_{(u_0, v_0)}$$

Figura 3.1: Vector normal y tangentes a la superficie S en $\mathbf{r}(u_0, v_0) = [x_0 \ y_0 \ z_0]^T$

Definición 3.1

Se define como vector normal unitario $\hat{\mathbf{n}}$ a una superficie dada en forma paramétrica, en un punto $\mathbf{x}_0 = [x_0 \ y_0 \ z_0]^T = [x(u_0, v_0) \ y(u_0, v_0) \ z(u_0, v_0)]^T$ al producto vectorial:

$$\hat{\mathbf{n}} = \left[\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|} \right] \Big|_{(u_0, v_0)}$$

Esto equivale a resolver el siguiente determinante:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|} \Bigg|_{(u_0, v_0)} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \end{bmatrix}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|} \Bigg|_{(u_0, v_0)}$$

siendo:

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Bigg|_{(u_0, v_0)} = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2} \Bigg|_{(u_0, v_0)}$$

el módulo o norma 2 del vector normal.

Si la superficie no se encuentra parametrizada, sino en función de las coordenadas cartesianas y en forma implícita $S(x, y, z) = 0$, el vector normal unitario en un punto $\mathbf{x}_0 = [x_0 \ y_0 \ z_0]^T \in S$ puede determinarse normalizando el gradiente:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla S}{\|\nabla S\|} \Bigg|_{\mathbf{x}_0} = \frac{\frac{\partial S}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial S}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial S}{\partial z} \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2}} \Bigg|_{\mathbf{x}_0}$$

En forma vectorial:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial x} \\ \frac{\partial S}{\partial y} \\ \frac{\partial S}{\partial z} \end{bmatrix}}{\sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2}} \Bigg|_{\mathbf{x}_0}$$

4. Diferencial de superficie

A continuación, se presentarán las diferentes maneras de expresar el Diferencial de Superficie

4.1. Diferencial de superficie en forma paramétrica

La definición del diferencial para una superficie dada en forma paramétrica es idéntica a un cambio de coordenadas como los vistos anteriormente. Se trata de pasar, mediante un vector \mathbf{r} , de un dominio T de límites constantes a un dominio S donde se encuentra la superficie.

Sea \mathbf{r} un vector que hace corresponder puntos en forma biunívoca del plano uv al espacio xyz (vea la Página 11):

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix}$$

El vector \mathbf{r} mapea el punto $(u_0, v_0) \in T$ en \mathbb{R}^3 , obteniéndose:

$$\mathbf{r}(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} x(u_0, v_0) \\ y(u_0, v_0) \\ z(u_0, v_0) \end{bmatrix}$$

Si en T se incrementa u_0 una cantidad Δu , manteniendo $v = v_0$ constante, se tiene:

$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) = \begin{bmatrix} x(u_0 + \Delta u, v_0) \\ y(u_0 + \Delta u, v_0) \\ z(u_0 + \Delta u, v_0) \end{bmatrix}$$

Aplicando la definición de diferencial (o utilizando la aproximación de Taylor hasta el primer orden), el vector incrementado puede escribirse como:

$$\mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) = \begin{bmatrix} x(u_0, v_0) + \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_{(u_0, v_0)} \Delta u \\ y(u_0, v_0) + \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_{(u_0, v_0)} \Delta u \\ z(u_0, v_0) + \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_{(u_0, v_0)} \Delta u \end{bmatrix}$$

La longitud Δu en T equivale a la diferencia entre los vectores $\Delta \mathbf{r}_u = \mathbf{r}(u_0 + \Delta u, v_0) - \mathbf{r}(u_0, v_0)$:

$$\Delta \mathbf{r}_u = \begin{bmatrix} x(u_0, v_0) + \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_{(u_0, v_0)} \Delta u \\ y(u_0, v_0) + \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_{(u_0, v_0)} \Delta u \\ z(u_0, v_0) + \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_{(u_0, v_0)} \Delta u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x(u_0, v_0) \\ y(u_0, v_0) \\ z(u_0, v_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_{(u_0, v_0)} \\ \left. \frac{\partial y}{\partial u} \right|_{(u_0, v_0)} \\ \left. \frac{\partial z}{\partial u} \right|_{(u_0, v_0)} \end{bmatrix} \Delta u$$

Que es igual al vector $\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right|_{(u_0, v_0)}$ evaluado en el punto (u_0, v_0) , multiplicado por el incremento Δu . Siguiendo un razonamiento análogo, si en T se incrementa v_0 una cantidad

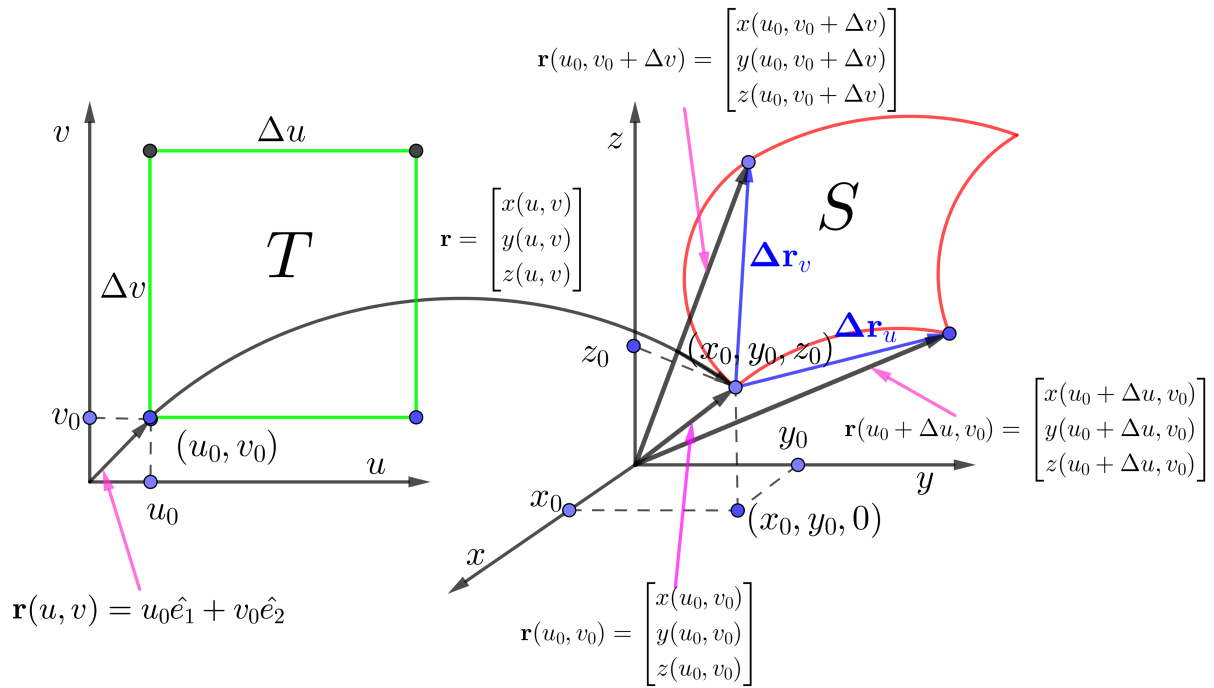


Figura 4.1: Diferencial de Superficie

Δv , manteniendo $u = u_0$ constante, se tiene:

$$\Delta \mathbf{r}_v = \begin{bmatrix} x(u_0, v_0) + \frac{\partial x}{\partial v} \Big|_{(u_0, v_0)} \Delta v \\ y(u_0, v_0) + \frac{\partial y}{\partial v} \Big|_{(u_0, v_0)} \Delta v \\ z(u_0, v_0) + \frac{\partial z}{\partial v} \Big|_{(u_0, v_0)} \Delta v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x(u_0, v_0) \\ y(u_0, v_0) \\ z(u_0, v_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \Big|_{(u_0, v_0)} \Delta v$$

Que es igual al vector $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Big|_{(u_0, v_0)}$ evaluado en el punto (u_0, v_0) , multiplicado por el incremento Δv .

El área $\Delta u \Delta v$ en T se puede aproximar en S mediante el área del paralelogramo de lados $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Delta u$ y $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Delta v$.

El área del paralelogramo es igual al módulo del producto vectorial entre ambos vectores e igual al módulo del vector \mathbf{n} :

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \Delta u \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \Delta v \right\| = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \Delta u \Delta v$$

Si se toma el límite de la partición (que en este caso sería la diagonal del rectángulo en T en la Figura 4.1) tendiendo a cero, los vectores $\Delta \mathbf{r}_u$ y $\Delta \mathbf{r}_v$ se hacen tangentes a S , y se tiene que $\Delta u = du$ y $\Delta v = dv$, por lo tanto:

Definición 4.1

Se define **diferencial de superficie** a la expresión

$$dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv$$

Por consiguiente, el área de una superficie dada en forma paramétrica es la integral del diferencial de superficie dS :

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_T \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv$$

4.2. Diferencial de superficie en forma explícita

Si la superficie se encuentra dada en forma explícita, de la forma $S : z = f(x, y)$, el vector \mathbf{r} tiene las siguientes componentes:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{bmatrix}$$

Las derivadas parciales de \mathbf{r} son:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial x}\mathbf{j} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\mathbf{k} = \mathbf{i} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\mathbf{k} = \mathbf{j} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\mathbf{k}$$

En forma vectorial:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Aplicando la Definición 4.1:

$$dS = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} \right\| dx dy = \left\| -\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} \right\| dx dy$$

En definitiva:

$$dS = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right]^2} dx dy$$

Esto implica que la superficie S de ecuación $z = f(x, y)$ se ha proyectado sobre el plano xy transformándose a un área plana mediante el jacobiano dS .

Si se proyectan sobre los distintos planos coordenados, las expresiones del diferencial de superficie son análogas:

- Proyección sobre el plano xz :

$$dS = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial f(x, z)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x, z)}{\partial z}\right]^2} dx dz$$

- Proyección sobre el plano yz :

$$dS = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial f(y, z)}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(y, z)}{\partial z}\right]^2} dy dz$$

4.3. Obtención del dS en forma geométrica

Otra manera de determinar el diferencial de superficie es utilizando los cosenos directores del vector normal unitario $\hat{\mathbf{n}}$:

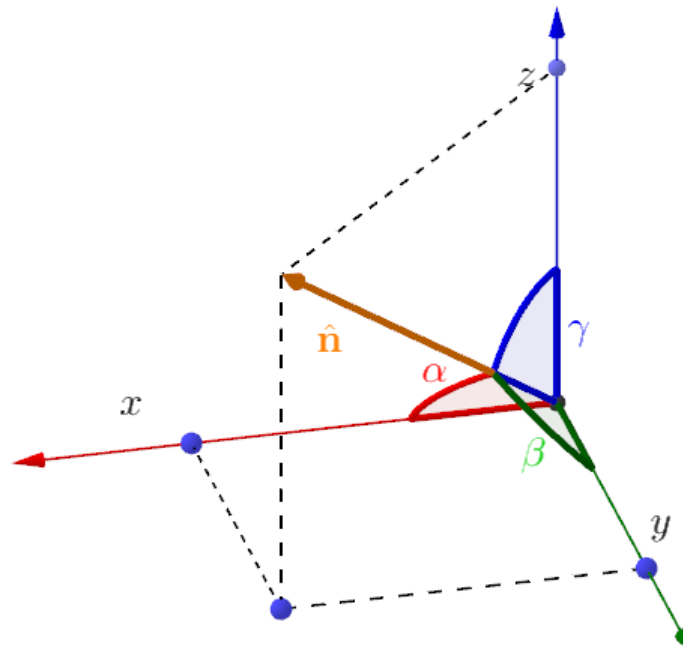


Figura 4.2: Ángulos directores

Sean x , y y z las proyecciones del vector $\hat{\mathbf{n}}$ sobre los ejes coordenados, se definen los

cosenos directores de $\hat{\mathbf{n}}$ como:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \frac{x}{\|\hat{\mathbf{n}}\|} \\ \cos(\beta) &= \frac{y}{\|\hat{\mathbf{n}}\|} \\ \cos(\gamma) &= \frac{z}{\|\hat{\mathbf{n}}\|}\end{aligned}$$

Por otra parte, la expresión para determinar el ángulo entre dos vectores proviene de las definiciones de producto escalar. Sean $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$ y $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3]^T$ dos vectores cualesquiera de tres componentes cada uno. El ángulo entre ellos se puede determinar como:

$$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos(\omega)$$

Siendo ω el ángulo comprendido entre ambos vectores.

Para este caso, se realiza el producto escalar entre el vector normal unitario a la superficie $\hat{\mathbf{n}}$ y el versor \mathbf{k} . Teniendo en cuenta que

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\|}$$

En el caso que la superficie se encuentre expresada como $z = f(x, y)$, se tiene:

$$\frac{\left[-\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right]}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\|} \cdot (\mathbf{0i} + \mathbf{0j} + \mathbf{k}) = \|\hat{\mathbf{n}}\| \|\mathbf{k}\| \cos(\gamma)$$

Recordando que los módulos del vector normal unitario $\hat{\mathbf{n}}$ y del versor \mathbf{k} son iguales a uno, se tiene:

$$\frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\|} = \cos(\gamma) \rightarrow \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = \frac{1}{\cos(\gamma)}$$

Siendo γ el ángulo director, formado entre el vector normal unitario $\hat{\mathbf{n}}$ y el versor \mathbf{k} , versor normal al plano de proyección, que en este caso es el plano xy . Vea la Figura 4.2.

Otras maneras de expresar el coseno son:

$$\cos(\gamma) = \cos(\hat{\mathbf{n}}, z) = \cos(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{k})$$

Por lo que el diferencial de superficie puede escribirse como:

$$dS = \frac{1}{\cos(\hat{\mathbf{n}}, z)} dx dy = \frac{1}{\cos(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{k})} dx dy$$

Si el plano de proyección de la superficie cambia, la expresión del diferencial de superficie cambiará:

- Proyección sobre el plano xz :

$$dS = \frac{1}{\cos(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{j})} dx dz = \frac{1}{\cos(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{j})} dx dz$$

- Proyección sobre el plano yz :

$$dS = \frac{1}{\cos(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{x})} dy dz = \frac{1}{\cos(\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{i})} dy dz$$

5. Integrales de superficie para campos escalares

Al igual que en las integrales vistas anteriormente, dependiendo del integrando, se obtendrán diferentes resultados. Sea la integral:

$$\iint_S f(x, y, z) dS$$

- Si $f(x, y, z) = 1$ la integral representará el área de S (área lateral)
- Si $f(x, y, z) = \rho(x, y, z)$ (siendo ρ una densidad por unidad de área), la integral representará la masa de S .
- Las coordenadas del centro de gravedad de una lámina S de densidad $\rho(x, y, z)$ se determinan de la siguiente manera:
 - $x_{cg} = \iint_S x \rho(x, y, z) dS$
 - $y_{cg} = \iint_S y \rho(x, y, z) dS$
 - $z_{cg} = \iint_S z \rho(x, y, z) dS$
- El momento de inercia I_L de S con respecto a un eje L se calcula como:

$$I_L = \iint_S \delta(x, y, z)^2 f(x, y, z) dS$$

Siendo $\delta(x, y, z)$ la distancia de un punto cualquiera de S a la recta L .

Ejemplo 5.1

Determinar el área lateral de una esfera de radio R cuya ecuación cartesiana es:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

Se sabe de la parametrización de superficies, que la esfera puede describirse con

el siguiente vector \mathbf{r} (vea la Figura 2):

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} = R \cos(u) \operatorname{sen}(v)\mathbf{i} + R \operatorname{sen}(u) \operatorname{sen}(v)\mathbf{j} + R \cos(v)\mathbf{k}$$

Las derivadas parciales de \mathbf{r} son:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k} = -R \operatorname{sen}(u) \operatorname{sen}(v)\mathbf{i} + R \cos(u) \operatorname{sen}(v)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k} = R \cos(u) \cos(v)\mathbf{i} + R \operatorname{sen}(u) \cos(v)\mathbf{j} - R \operatorname{sen}(v)\mathbf{k}$$

El diferencial de superficie resulta:

$$dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv = \left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{array} \right\| du dv =$$

$$\left\| \begin{array}{ccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -R \operatorname{sen}(u) \operatorname{sen}(v) & R \cos(u) \operatorname{sen}(v) & 0 \\ R \cos(u) \cos(v) & R \operatorname{sen}(u) \cos(v) & -R \operatorname{sen}(v) \end{array} \right\| du dv$$

$$dS = \left\| [-R^2 \cos(u) \operatorname{sen}^2(v)]\mathbf{i} - [R^2 \operatorname{sen}(u) \operatorname{sen}^2(v)]\mathbf{j} + [-R^2 \cos(v) \operatorname{sen}(v)]\mathbf{k} \right\| du dv$$

Resta calcular la norma 2 del vector normal:

$$dS = \sqrt{[R^2 \cos(u) \operatorname{sen}^2(v)]^2 + [R^2 \operatorname{sen}(u) \operatorname{sen}^2(v)]^2 + [R^2 \operatorname{sen}(v) \cos(v)]^2} du dv$$

$$dS = \sqrt{R^4 \cos^2(u) \operatorname{sen}^4(v) + R^4 \operatorname{sen}^2(u) \operatorname{sen}^4(v) + R^4 \operatorname{sen}^2(v) \cos^2(v)} du dv$$

Sacando factor común R^4 :

$$dS = R^2 \sqrt{\cos^2(u) \operatorname{sen}^4(v) + \operatorname{sen}^2(u) \operatorname{sen}^4(v) + \operatorname{sen}^2(v) \cos^2(v)} du dv$$

Sacando factor común $\operatorname{sen}^4(v)$ dentro de la raíz:

$$dS = R^2 \sqrt{\operatorname{sen}^4(v) [\cos^2(u) + \operatorname{sen}^2(u)] + \operatorname{sen}^2(v) \cos^2(v)} du dv =$$

$$dS = R^2 \sqrt{\operatorname{sen}^4(v) + \operatorname{sen}^2(v) \cos^2(v)} du dv$$

Factorizando el término $\text{sen}^4(v)$:

$$dS = R^2 \sqrt{\text{sen}^2(v) [\text{sen}^2(v) + \text{cos}^2(v)]} du dv = R^2 \sqrt{\text{sen}^2(v)} du dv$$

Por lo tanto, el diferencial de superficie resulta:

$$dS = R^2 \text{sen}(v) du dv$$

La variación de los parámetros para cubrir la esfera completa es:

$$0 \leq u \leq 2\pi \quad ; \quad 0 \leq v \leq \pi$$

El área lateral de la esfera resulta:

$$A_L = \iint_S dS = \iint_T \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \text{sen}(v) dv du$$

$$A_L = R^2 \int_0^{2\pi} -\text{cos}(v) \Big|_0^\pi du = 2R^2 \int_0^{2\pi} du = 4\pi R^2$$

Fórmula que era conocida por geometría.

6. Integrales de superficie para campos vectoriales

6.1. Superficie orientada

Se denomina superficie orientada a una superficie que posee dos lados (interno o negativo y externo o positivo). En cada punto de esta superficie existen dos vectores normales unitarios: $\hat{\mathbf{n}}$ y $-\hat{\mathbf{n}}$ (vea la Figura 6.1). Cada uno de estos vectores puede asociarse con un lado de la superficie. Por convenio, se considerará el lado positivo de la superficie al que contiene al vector externo (o saliente).

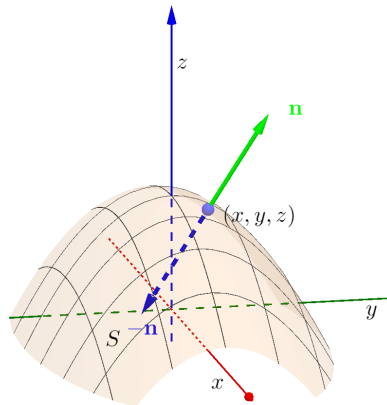


Figura 6.1: Superficie orientable

Un ejemplo de superficie NO orientable es la conocida Cinta de Möbius (Figura 6.2). Esta superficie solamente tiene un lado.

Figura 6.2: Cinta de Möbius

6.2. Flujo

Sea S una superficie orientada con vector normal unitario $\hat{\mathbf{n}}$. Sea un fluido con densidad variable punto a punto $\rho(\mathbf{x})$ y un campo de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ con $\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T$, que fluye a través de S . La razón de flujo (masa por unidad de tiempo) por unidad de área es $\rho\mathbf{v}$.

Si se divide a la superficie en partes más pequeñas $S_{i,j}$ de tal manera que tiendan a ser planas, se puede aproximar la masa de fluido por unidad de tiempo que cruza $S_{i,j}$ en la dirección del vector normal unitario con la expresión:

$$(\rho\mathbf{v}^T\hat{\mathbf{n}}) S_{i,j}$$

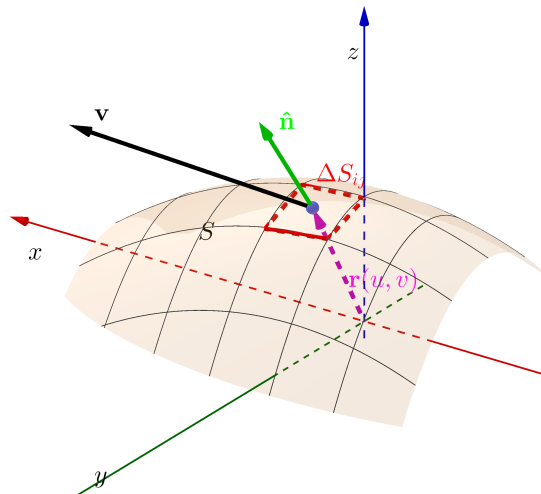


Figura 6.3: Flujo del campo vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ a través de la porción de superficie $S_{i,j}$

Al sumar las cantidades anteriores y tomar el límite cuando el número de subdivisiones tienden a infinito, se obtiene:

$$\iint_S \rho \mathbf{v}^T \hat{\mathbf{n}} dS$$

Lo que se interpreta como la razón de flujo a través de S .

Si se reemplaza el campo vectorial de velocidades de un fluido $\rho \mathbf{v}$ por un campo vectorial genérico \mathbf{F} , se tiene la siguiente definición:

Definición 6.1

Si \mathbf{F} es un campo vectorial continuo definido en una superficie orientada S con vector normal unitario $\hat{\mathbf{n}}$, entonces se define **flujo del campo vectorial \mathbf{F} a través de S a la expresión**

$$\Phi = \iint_S \mathbf{F}^T \hat{\mathbf{n}} dS$$

Si la superficie S está dada en forma paramétrica, debe normalizarse el vector $\hat{\mathbf{n}}$ para que su módulo sea igual a 1:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{F}^T \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|} dS$$

Recordando la expresión de dS :

$$dS = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv$$

Se tiene:

$$\Phi = \iint_T \mathbf{F}(u, v)^T \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\|} \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv$$

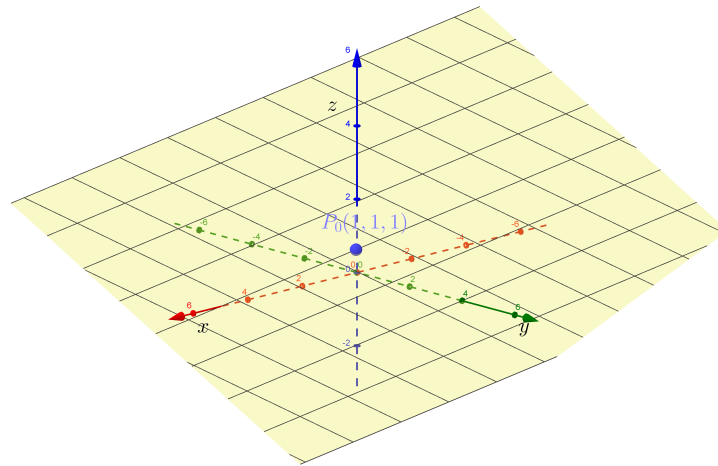
Por lo tanto, el flujo en una superficie expresada en forma paramétrica, resulta:

$$\Phi = \iint_T \mathbf{F}(u, v)^T \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv$$

Ejemplo 6.1

Sea el campo vectorial $\mathbf{F} = [x \ x^2 \ yz]^T$ correspondiente a un campo de velocidades de un fluido, calcular cuantos metros cúbicos por segundo (caudal) de fluido cruzan la porción del plano de ecuación $S : \frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{11z}{20} = 1$, en el primer octante (ver la

Figura 6.4).


 Figura 6.4: Plano de ecuación $S : \frac{x}{5} + \frac{y}{4} + \frac{11z}{20} = 1$

Los puntos de corte del plano con los ejes vienen dados por la ecuación de S : el corte en el eje x se produce en el punto $(5, 0, 0)$; mientras que el corte en y se produce en el punto $(0, 4, 0)$. Además, el punto $(1, 1, 1)$ pertenece al plano.

Sin demasiado esfuerzo es posible llevar la expresión de S a explícita, despejando z :

$$S : z = \frac{20}{11} \left(1 - \frac{x}{5} - \frac{y}{4} \right) = \frac{20}{11} - \frac{4}{11}x - \frac{5}{11}y$$

Si se escoge como plano de proyección de S al plano xy , la expresión del dS es (vea la Subsección Subsección 4.2):

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2} dx dy = \sqrt{1 + \left(-\frac{4}{11} \right)^2 + \left(-\frac{5}{11} \right)^2} dx dy = \frac{9}{11} \sqrt{2} dx dy$$

El vector normal unitario se calcula como:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\begin{bmatrix} -\frac{\partial S}{\partial x} \\ -\frac{\partial S}{\partial y} \\ 1 \end{bmatrix}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2}} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{4}{11} \\ \frac{5}{11} \\ 1 \end{bmatrix}}{9\sqrt{2}}$$

El flujo a través del plano se obtiene al resolver la siguiente integral:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{F}^T \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_R \mathbf{F}^T \hat{\mathbf{n}} dx dy$$

Es decir:

$$\Phi = \iint_R [x \ x^2 \ yz] \begin{bmatrix} \frac{4}{11} \\ \frac{5}{11} \\ 1 \end{bmatrix} \frac{11}{9\sqrt{2}} \frac{9}{11} \sqrt{2} \, dx \, dy$$

Los límites de integración son (manteniendo a x como constante): $0 \leq x \leq 5$ y $0 \leq y \leq 4 - \frac{4}{5}x$. Solamente queda el detalle de la variable z en la tercera componente del campo vectorial. Esta debe reemplazarse por su expresión en S :

$$\Phi = \int_0^5 \int_0^{4-4/5x} [x \ x^2 \ y \left(\frac{20}{11} - \frac{4}{11}x - \frac{5}{11}y\right)] \begin{bmatrix} \frac{4}{11} \\ \frac{5}{11} \\ 1 \end{bmatrix} dy \, dx$$

Resolviendo el producto escalar:

$$\Phi = \int_0^5 \int_0^{4-4/5x} \left(\frac{4}{11}x + \frac{5}{11}x^2 + \frac{20}{11}y - \frac{4}{11}xy - \frac{5}{11}y^2 \right) dy \, dx$$

Integrando con respecto a y :

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^5 \left(\frac{4}{11}xy + \frac{5}{11}x^2y + \frac{20}{22}y^2 - \frac{4}{22}xy^2 - \frac{5}{33}y^3 \right) \Big|_0^{4-4/5x} dx \\ \Phi &= \int_0^5 \left[\frac{4}{11}x \left(4 - \frac{4}{5}x\right) + \frac{5}{11}x^2 \left(4 - \frac{4}{5}x\right) + \frac{20}{22} \left(4 - \frac{4}{5}x\right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{22}x \left(4 - \frac{4}{5}x\right)^2 - \frac{5}{33} \left(4 - \frac{4}{5}x\right)^3 \right] dx \end{aligned}$$

Resolviendo:

$$\Phi = \int_0^5 \left(-\frac{236}{825}x^3 + \frac{228}{275}x^2 + \frac{144}{55}x + \frac{64}{33} \right) dx$$

Por último:

$$\Phi = \left(-\frac{236}{3300}x^4 + \frac{228}{825}x^3 + \frac{144}{110}x^2 + \frac{64}{33}x \right) \Big|_0^5$$

El volumen de fluido (en m^3) por unidad de tiempo (segundos) (caudal o flujo) que cruza el plano es:

$$\Phi = 32.27 \text{ m}^3/\text{s}$$

6.3. Divergencia de un campo vectorial

La divergencia de un campo vectorial puede interpretarse físicamente de varias maneras:

- Variación del flujo por unidad de volumen, esto es como la diferencia entre el flujo saliente y entrante de un campo vectorial sobre una superficie que rodea un volumen de control.
- En hidráulica, se puede interpretar como una medida de la razón de cambio de la densidad del fluido en un punto (da una idea de la compresibilidad del fluido)

Matemáticamente, la divergencia de un campo vectorial se define de la siguiente manera:

Definición 6.2

Sea $\mathbf{F} = [P(\mathbf{x}) \ Q(\mathbf{x}) \ R(\mathbf{x})]^T$ un campo vectorial continuo, $A(\mathbf{x})$ un punto perteneciente al dominio de \mathbf{F} , $S(\mathbf{x})$ una superficie orientable cerrada que rodea al punto $A(\mathbf{x})$, generando un volumen V , y $\hat{\mathbf{n}}$ un vector normal unitario a $S(\mathbf{x})$, entonces

$$\text{div}(\mathbf{F})|_A = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oiint_S \mathbf{F}^T \hat{\mathbf{n}} \, dS$$

Siempre que el límite exista

Figura 6.5: Divergencia

La definición dada anteriormente es independiente del sistema de coordenadas adoptado. Para el caso particular del sistema cartesiano, la **divergencia** del campo vectorial \mathbf{F} en el punto A se puede escribir como: (Vea la Demostración del Teorema de Gauss (Subsección 6.5) para comprender los detalles de cómo se obtiene esta expresión):

$$\text{div}(\mathbf{F})|_A = \nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla^T \mathbf{F}$$

Siendo ∇ el operador Nabla de Hamilton, un pseudo-vector, cuya expresión es:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

O en notación vectorial:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Para un campo vectorial $\mathbf{F} = [P(\mathbf{x}) \ Q(\mathbf{x}) \ R(\mathbf{x})]^T$, la divergencia resulta:

$$\text{div}(\mathbf{F})|_A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(\mathbf{x}) \\ Q(\mathbf{x}) \\ R(\mathbf{x}) \end{bmatrix}_A = \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_A + \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_A + \frac{\partial R}{\partial z} \Big|_A$$

- Si $\text{div}(\mathbf{F})|_A > 0$, predomina el flujo saliente. El fluido se expande, se dice que el campo tiene una fuente.
- Si $\text{div}(\mathbf{F})|_A < 0$, predomina el flujo entrante. El fluido se contrae, se dice que el campo tiene un sumidero.
- Si $\text{div}(\mathbf{F})|_A = 0$, la misma cantidad que entra en el volumen de control es la misma que sale. El fluido se denomina incompresible.

Ejemplo 6.2

Dado el campo vectorial $\mathbf{F} = [2x - z \quad -2x + y \quad xz]^T$, graficado en la Figura 6.6, calcule la divergencia en tres puntos diferentes.

Figura 6.6: Campo vectorial del Ejemplo

La divergencia de un campo vectorial es:

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2 + 1 + x$$

- Para $A(x, y, z) = (1, 0, 1)$

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 2 + 1 + x = 4$$

- Para $A(x, y, z) = (-4, 4, 1)$

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 2 + 1 + x = -1$$

- Para $A(x, y, z) = (-3, 0, 3)$

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = 2 + 1 + x = 0$$

En este ejemplo se observa que la divergencia de un campo vectorial es un concepto puntual: En el primer punto, al ser positiva la divergencia, puede decirse que el campo vectorial se está expandiendo, o que ese es un punto fuente; en el segundo punto ocurre lo contrario. Puede afirmarse que ese punto actúa como un sumidero, en el cual el campo vectorial se está contrayendo. Por último, la divergencia calculada en el tercer punto es nula. Esto indica que en ese punto, el campo no se expande ni se contrae.

6.4. Rotor de un campo vectorial

El rotor (o rotacional) de un campo vectorial muestra la tendencia de éste para generar rotación alrededor de un punto. Se define de la siguiente manera:

Definición 6.3

Sea $\mathbf{F} = [P(\mathbf{x}) \quad Q(\mathbf{x}) \quad R(\mathbf{x})]^T$ un campo vectorial continuo, A un punto perteneciente al dominio de \mathbf{F} , S una superficie orientable abierta que rodea al punto A (por simplicidad, se tomará un cuadrado), una curva C regular a trozos que es el borde de S y $\hat{\mathbf{n}}$ un vector normal unitario a S , entonces se define como rotor del campo vectorial \mathbf{F} en el punto A a la expresión:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F})|_A \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r}$$

Siempre que el límite exista.

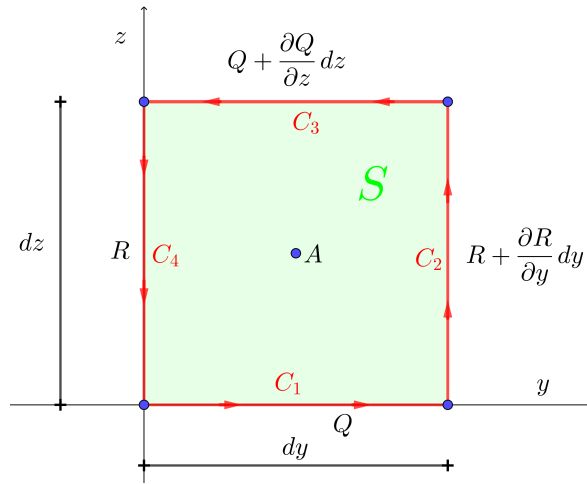


Figura 6.7: Demostración de la ecuación del rotor del campo vectorial

La expresión definida anteriormente es independiente del sistema de coordenadas adoptado. Para el caso particular del sistema cartesiano, y de un campo vectorial $\mathbf{F} = [P(\mathbf{x}) \ Q(\mathbf{x}) \ R(\mathbf{x})]^T$, con $\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T$, el **rotor** viene dado por la expresión:

$$\text{rot} [\mathbf{F}(\mathbf{x})]_A = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

O en notación vectorial:

$$\text{rot} [\mathbf{F}(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Para demostrar la primera componente de esta expresión, se recurrirá a la Figura 6.7. Allí se ha considerado como S un cuadrado de lados dy y dz , contenido en el plano yz . El vector normal unitario a S es \mathbf{i} (perpendicular a esta página). La curva C se encuentra dividida en cuatro trozos: C_1 , C_2 , C_3 y C_4 , es decir $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$. La parametrización que se utilizará es la de un segmento de recta.

A continuación, se calculará la circulación a lo largo de C :

$$\oint_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}^T d\mathbf{r}_1 + \int_{C_2} \mathbf{F}^T d\mathbf{r}_2 + \int_{C_3} \mathbf{F}^T d\mathbf{r}_3 + \int_{C_4} \mathbf{F}^T d\mathbf{r}_4 = \sum_{i=1}^4 \int_{C_i} \mathbf{F}^T d\mathbf{r}_i$$

- Integral de línea a través de C_1 : El vector $d\mathbf{r}_1$ resulta:

$$d\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ dy \\ 0 \end{bmatrix} dt$$

Por lo que, el producto escalar entre el campo vectorial y el vector $d\mathbf{r}_1$ resulta:

$$[P(\mathbf{x}) \quad Q(\mathbf{x}) \quad R(\mathbf{x})] \begin{bmatrix} 0 \\ dy \\ 0 \end{bmatrix} dt = Q(\mathbf{x}) \, dy \, dt$$

- Integral de línea a través de C_3 : El campo vectorial que actúa sobre C_3 se encuentra incrementado la cantidad $\frac{\partial Q}{\partial z} dz$. Esta expresión se obtiene al calcular el diferencial primero de Q (con x y y constantes, es decir $dx = 0$ y $dy = 0$):

$$Q(x + dx, y + dy, z + dz) = Q(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz = Q(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial z} dz$$

El vector $d\mathbf{r}_3$ resulta:

$$d\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -dy \\ 0 \end{bmatrix} dt$$

El signo negativo se debe al sentido de circulación (es contrario al de C_1). El producto escalar entre el campo vectorial y el vector $d\mathbf{r}_3$ resulta:

$$\left[P(\mathbf{x}) \quad Q(\mathbf{x}) + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \quad R(\mathbf{x}) \right] \begin{bmatrix} 0 \\ -dy \\ 0 \end{bmatrix} dt = -Q(\mathbf{x}) \, dy \, dt - \frac{\partial Q}{\partial z} dz \, dy \, dt$$

- Integral de línea a través de C_2 : Al igual que sobre C_3 , el campo vectorial que actúa sobre C_2 se encuentra incrementado la cantidad $\frac{\partial R}{\partial y} dy$. Esta expresión se obtiene al calcular el diferencial primero de R (con x y z constantes, es decir $dx = 0$ y $dz = 0$):

$$R(x + dx, y + dy, z + dz) = R(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz = R(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial y} dy$$

El vector $d\mathbf{r}_2$ resulta:

$$d\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ dz \end{bmatrix} dt$$

El producto escalar entre el campo vectorial y el vector $d\mathbf{r}_2$ resulta:

$$\left[P(\mathbf{x}) \quad Q(\mathbf{x}) \quad R(\mathbf{x}) + \frac{\partial R}{\partial y} dy \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ dz \end{bmatrix} dt = R(\mathbf{x}) \, dz \, dt + \frac{\partial R}{\partial y} dy \, dz \, dt$$

- Integral de línea a través de C_4 : El vector $d\mathbf{r}_4$ resulta:

$$d\mathbf{r}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -dz \end{bmatrix} dt$$

El signo negativo se debe al sentido de circulación (contrario al de C_2). El producto escalar entre el campo vectorial y el vector $d\mathbf{r}_4$ resulta:

$$[P(\mathbf{x}) \quad Q(\mathbf{x}) \quad R(\mathbf{x})] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -dz \end{bmatrix} dt = -R(\mathbf{x}) dz dt$$

Sumando todas las expresiones correspondientes a cada curva e integrando con respecto a la variable t (con la que se realizó la parametrización), se obtiene la circulación total:

$$\oint_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r} = \int_0^1 \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz dt = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz$$

Recordando que el vector normal unitario $\hat{\mathbf{n}}$ para la primera componente del rotor es \mathbf{i} :

$$\text{rot}[\mathbf{F}(\mathbf{x})]_A \cdot \mathbf{i} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r}$$

De acuerdo a esta definición, debe dividirse la circulación por el área del cuadrado y hacerla tender a cero para obtener la proyección del rotor sobre el vector normal unitario de la superficie (en este caso, \mathbf{i}) en el punto A :

$$\text{rot}[\mathbf{F}(\mathbf{x})]_A \cdot \mathbf{i} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r} = \left[\lim_{dy \ dz \rightarrow 0} \frac{1}{dy \ dz} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \ dz \right] \mathbf{i}$$

$$\text{rot}[\mathbf{F}(\mathbf{x})]_A \cdot \mathbf{i} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i}$$

Por procedimientos análogos se obtienen las otras dos componentes del rotor del campo vectorial.

Una manera sencilla de calcularlo es a través del determinante:

$$\text{rot}(\mathbf{F})|_A = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Siendo ∇ el operador Nabla de Hamilton, definido anteriormente.

Ejemplo 6.3

Dado el campo vectorial $\mathbf{F} = \left[\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad 0 \right]^T$, calcule el rotor en tres puntos diferentes.

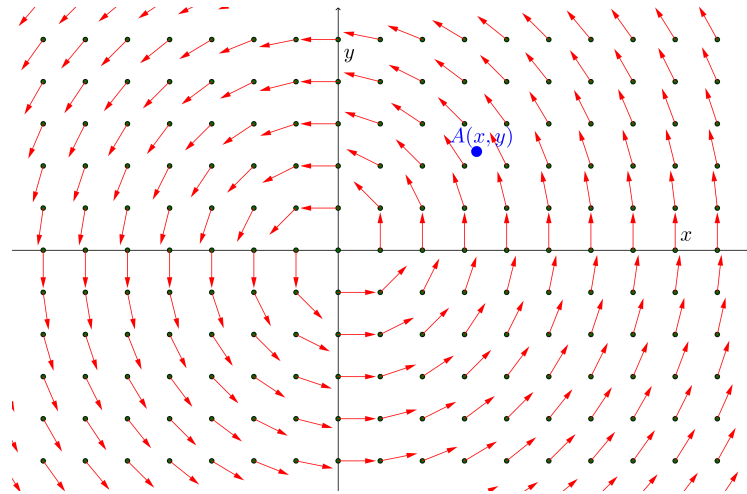


Figura 6.8: Campo vectorial $\mathbf{F} = \left[\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad 0 \right]^T$

El campo vectorial se muestra en la Figura 6.8. El rotor se determina resolviendo el determinante:

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & 0 \end{vmatrix}$$

El rotor resulta:

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \left[\frac{-x^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} - \frac{y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right] \mathbf{k}$$

- Para $A(x, y) = (1, 0)$

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \left[\frac{-1^2}{\sqrt{(1^2 + 0^2)^3}} - \frac{0^2}{\sqrt{(1^2 + 0^2)^3}} + \frac{2}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \right] \mathbf{k} = 1 \mathbf{k}$$

- Para $A(x, y) = (0, 1)$

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \left[\frac{0^2}{\sqrt{(0^2 + 1^2)^3}} - \frac{1^2}{\sqrt{(0^2 + 1^2)^3}} + \frac{2}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \right] \mathbf{k} = 1 \mathbf{k}$$

- Para $A(x, y) = (1, 1)$

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \left[\frac{-1^2}{\sqrt{(1^2 + 1^2)^3}} - \frac{1^2}{\sqrt{(1^2 + 1^2)^3}} + \frac{2}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \right] \mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{k}$$

Note que el sentido de todos los vectores es en la dirección del eje z positivo (compruébelo con la regla de la mano derecha en la Figura 6.8).

6.5. Teorema de Gauss o de la divergencia

Sea R una región sólida limitada por una superficie cerrada S , cuyo vector normal unitario $\hat{\mathbf{n}}$ está dirigido al exterior de S . Si $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [P(\mathbf{x}) \ Q(\mathbf{x}) \ R(\mathbf{x})]^T$ es un campo vectorial cuyas funciones componentes admiten derivadas parciales continuas en R , entonces:

El flujo de \mathbf{F} a través de S es igual a la integral triple de la divergencia de \mathbf{F} en el volumen encerrado por S :

$$\Phi = \oiint_S \mathbf{F}^T \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iiint_R \text{div}(\mathbf{F}) \, dx \, dy \, dz$$

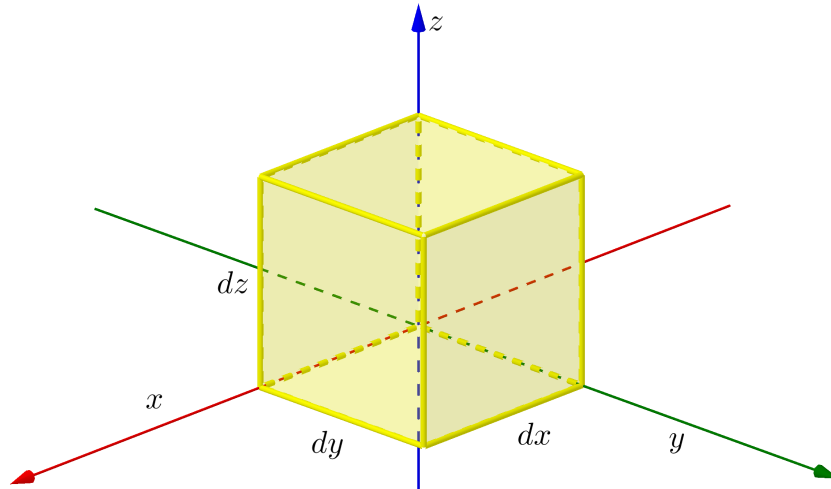


Figura 6.9: Volumen de control

Demostración

Sea el diferencial de volumen (denominado volumen de control) mostrado en la Figura 6.9, cuyo volumen es $dV = dx \, dy \, dz$. Se calculará la variación que experimenta el campo vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [P(\mathbf{x}) \ Q(\mathbf{x}) \ R(\mathbf{x})]^T$, sobre el volumen de control para cada una de las tres direcciones.

Utilizando la definición del diferencial de una función, las componentes del campo vectorial en el entorno de un punto genérico $\mathbf{x} = [x \ y \ z]^T$ resultan:

- En la dirección x (y y z son constantes, lo que implica que dy y dz son iguales a cero)

$$P(x + dx, y + dy, z + dz) = P(x, y, z) + \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \approx P(x, y, z) + \frac{\partial P}{\partial x} dx$$

- En la dirección y (x y z son constantes, lo que implica que dx y dz son iguales a cero)

$$Q(x + dx, y + dy, z + dz) = Q(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \approx Q(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y} dy$$

- En la dirección z (x y y son constantes, lo que implica que dx y dy son iguales a cero)

$$R(x + dx, y + dy, z + dz) = R(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz \approx R(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z} dz$$

Las expresiones anteriores indican cómo varía el campo vectorial al atravesar el volumen de control. El diferencial de flujo neto (vea la Definición 6.1) (diferencia entre flujo saliente y entrante) a través de las caras del volumen de control es (vea la Figura 6.10):

- En la dirección x

$$d\Phi_x = \left[P(x, y, z) + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right] dydz - P(x, y, z) dydz = \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz$$

- En la dirección y

$$d\Phi_y = \left[Q(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right] dx dz - Q(x, y, z) dx dz = \frac{\partial Q}{\partial y} dy dx dz$$

- En la dirección z

$$d\Phi_z = \left[R(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right] dx dy - R(x, y, z) dx dy = \frac{\partial R}{\partial z} dz dx dy$$

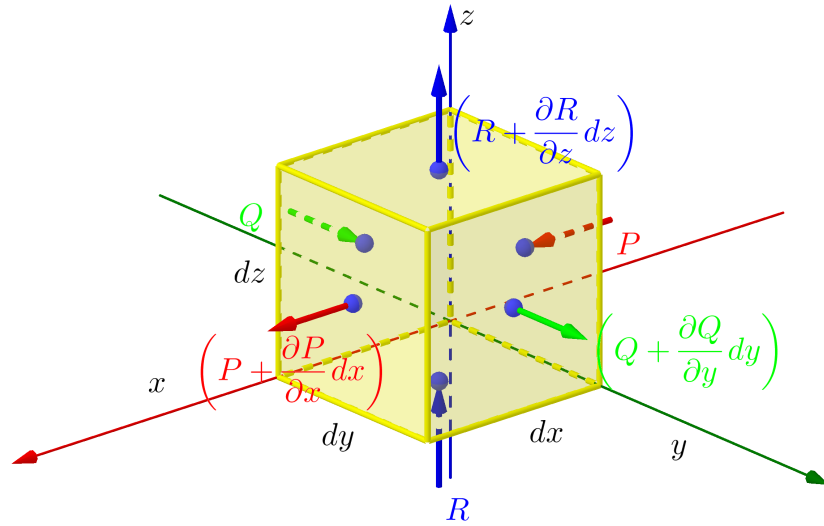


Figura 6.10: Variación del flujo del campo vectorial a través del volumen de control

La variación total sobre el volumen de control se obtiene sumando los flujos netos de las tres direcciones diferentes:

$$d\Phi = d\Phi_x + d\Phi_y + d\Phi_z = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$

Esta expresión puede considerarse como el resultado del producto escalar entre el operador ∇ y el campo vectorial \mathbf{F} :

$$d\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot [P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}] dV$$

O en notación vectorial:

$$d\Phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(\mathbf{x}) \\ Q(\mathbf{x}) \\ R(\mathbf{x}) \end{bmatrix} dV = \nabla^T \mathbf{F} dV$$

De acuerdo a la Definición 6.2, la expresión anterior se puede escribir como:

$$d\Phi = \nabla^T \mathbf{F} dV = \operatorname{div}(\mathbf{F}) dV$$

El flujo neto total se obtiene resolviendo la integral:

$$\Phi = \iiint_R \nabla^T \mathbf{F} dV$$

Siendo R el volumen encerrado por la superficie S . Por otro lado, se tiene (vea la Definición 6.1):

$$\Phi = \oiint_S \mathbf{F}^T \hat{\mathbf{n}} dS$$

Con lo que se demuestra que:

$$\Phi = \oiint_S \mathbf{F}^T \hat{\mathbf{n}} \, dS = \iiint_R \operatorname{div}(\mathbf{F}) \, dV$$

Para tener en cuenta:

- Este teorema relaciona integrales de superficie (flujo) con integrales múltiples (triples).
- Es necesario que la superficie S sea **cerrada** para poder aplicarlo. Si la superficie no es cerrada, el flujo debe calcularse por definición.
- Una de las hipótesis exige que las componentes del campo vectorial admitan derivadas parciales continuas. Esto es para calcular la divergencia.

Ejemplo 6.4

Calcule el flujo del campo $\mathbf{F} = [x^2 \ y^2 \ z^2]^T$ a través de la superficie $S : z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ con $0 \leq z \leq 1$

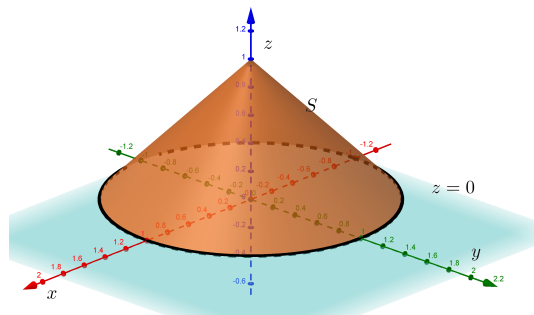


Figura 6.11: Superficie cerrada S

Como se trata de una superficie cerrada, puede aplicarse el teorema de Gauss. Para ello debe calcularse la divergencia de \mathbf{F} :

$$\operatorname{div}(\mathbf{F}) = \nabla^T \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2x + 2y + 2z$$

De acuerdo al Teorema de Gauss:

$$\Phi = \iiint_R \operatorname{div}(\mathbf{F}) \, dV = \iiint_R (2x + 2y + 2z) \, dV$$

Realizando el cambio de coordenadas cartesianas a cilíndricas:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \operatorname{sen}(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

$$J = \rho$$

Los límites de las variables son:

$$0 \leq \rho \leq 1$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq z \leq 1 - \rho$$

El flujo se obtiene al resolver la integral:

$$\Phi = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-\rho} \rho [\rho \cos(\theta) + \rho \operatorname{sen}(\theta) + (1 - \rho)] dz d\rho d\theta$$

$$\Phi = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{1-\rho} [\rho^2 \cos(\theta) + \rho^2 \operatorname{sen}(\theta) + \rho - \rho^2] dz d\rho d\theta$$

$$\Phi = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 [\rho^2 \cos(\theta)(1 - \rho) + \rho^2 \operatorname{sen}(\theta)(1 - \rho) + \rho(1 - \rho) - \rho^2(1 - \rho)] d\rho d\theta$$

$$\Phi = 2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3} \rho^3 \cos(\theta) - \frac{1}{4} \rho^4 \cos(\theta) + \frac{1}{3} \rho^3 \operatorname{sen}(\theta) - \frac{1}{4} \rho^4 \operatorname{sen}(\theta) + \frac{\rho^2}{2} - \frac{2}{3} \rho^3 + \frac{1}{4} \rho^4 \right] \Big|_0^1 d\theta$$

$$\Phi = 2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12} \cos(\theta) + \frac{1}{12} \operatorname{sen}(\theta) + \frac{1}{12} \right] d\theta$$

$$\Phi = \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} [\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta) + 1] d\theta$$

$$\Phi = \frac{1}{6} [\operatorname{sen}(\theta) - \cos(\theta) + \theta] \Big|_0^{2\pi}$$

$$\Phi = \frac{1}{3} \pi$$

6.6. Teorema de Stokes

Sea S una superficie abierta, con vector normal unitario $\hat{\mathbf{n}}$ dirigido al exterior, cuyo contorno es una curva cerrada simple C , suave a trozos (vea la Figura 6.12). Si $\mathbf{F} = [P(\mathbf{x}) \ Q(\mathbf{x}) \ R(\mathbf{x})]^T$ es un campo vectorial cuyas funciones componentes admiten derivadas parciales continuas en una región abierta R que contiene a S y a C , entonces el flujo del rotor \mathbf{F} a través de S es igual a la integral de línea de \mathbf{F} evaluada sobre la curva

de borde C de la superficie:

$$\Phi_{\text{rot}} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F})^T \hat{\mathbf{n}} \, dS = \oint_C \mathbf{F}^T \, d\mathbf{r}$$

Demostración

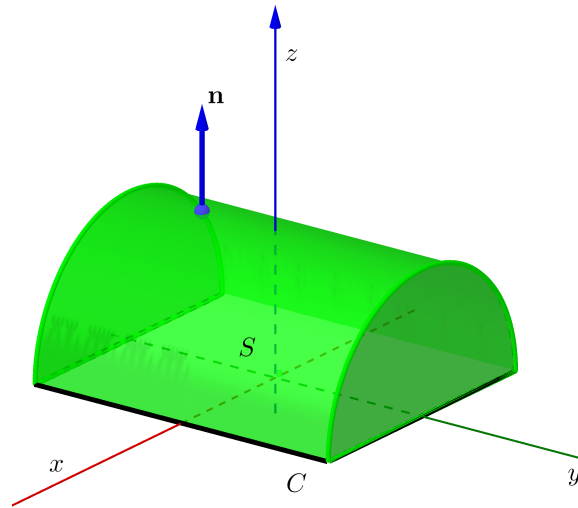


Figura 6.12: Superficie abierta con vector normal unitario $\hat{\mathbf{n}}$ dirigido al exterior (orientada), y contorno C

Considere una malla alrededor de S , de tal manera que se generen n sub-áreas, cada una con superficie ΔS . Se escoge un punto genérico P_k con $k = 1, 2, \dots, n$, interior a una sub-área ΔS_k , cuya curva de contorno es C_k (ver Figura 6.13).

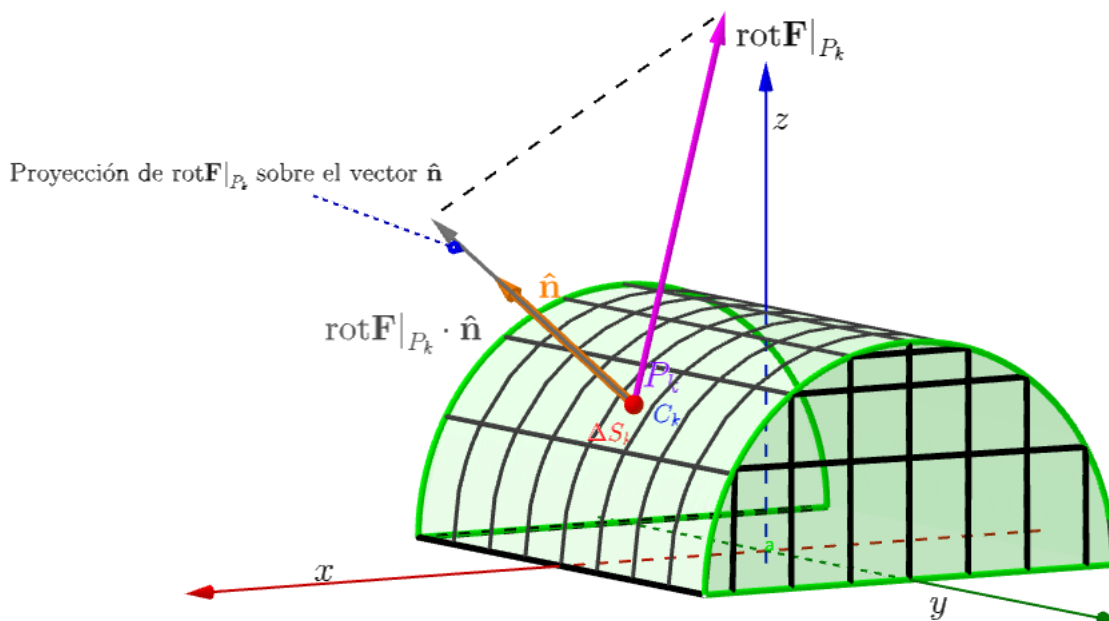


Figura 6.13: Malla sobre la superficie S , dividiéndola en sub-áreas ΔS

Aplicando la Definición 6.3 a la sub-área ΔS_k se tiene:

$$\text{rot}(\mathbf{F})^T \hat{\mathbf{n}} \Big|_{P_k} = \lim_{\Delta S_k \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_k} \oint_{C_k} \mathbf{F}^T d\mathbf{r}$$

Recordando el Lema visto en el tema Funciones de Varias Variables, “Toda función $f(x, y)$ que posea límite L puede escribirse como la suma de este límite L y un infinitésimo $\epsilon(x, y)$ ”, resultando $f(x, y) = L + \epsilon(x, y)$.

Según este lema, se tiene:

$$\text{rot}(\mathbf{F})^T \hat{\mathbf{n}} \Big|_{P_k} = \lim_{\Delta S_k \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_k} \oint_{C_k} \mathbf{F}^T d\mathbf{r} = \frac{1}{\Delta S_k} \oint_{C_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \epsilon_k$$

Multiplicando ambos miembros por ΔS_k :

$$\text{rot}(\mathbf{F})^T \hat{\mathbf{n}} \Big|_{P_k} \Delta S_k = \frac{1}{\Delta S_k} \oint_{C_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \Delta S_k + \epsilon_k \Delta S_k$$

Resultando:

$$\text{rot}(\mathbf{F})^T \hat{\mathbf{n}} \Big|_{P_k} \Delta S_k = \oint_{C_k} \mathbf{F}^T d\mathbf{r} + \epsilon_k \Delta S_k$$

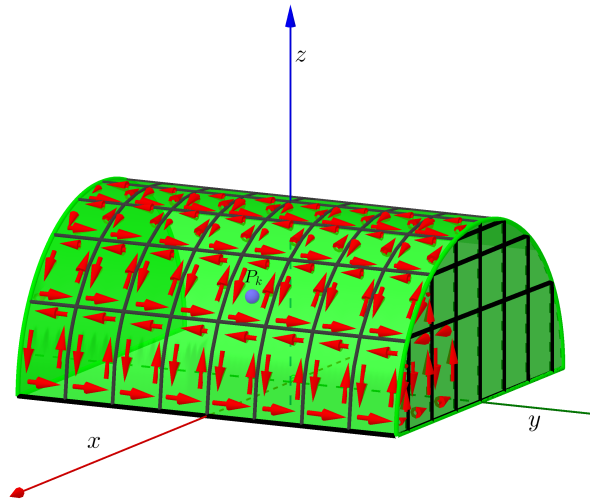


Figura 6.14: Circulación en cada malla de sub-área ΔS

Sumando todas las mallas:

$$\sum_{k=1}^n \text{rot}(\mathbf{F})^T \hat{\mathbf{n}} \Big|_{P_k} \Delta S_k = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} \mathbf{F}^T d\mathbf{r} + \sum_{k=1}^n \epsilon_k \Delta S_k$$

Tomando límite cuando el área (diagonal) de las mallas ΔS_k tienden a cero:

$$\lim_{\Delta S_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \text{rot}(\mathbf{F})^T \hat{\mathbf{n}} \Big|_{P_k} \Delta S_k = \lim_{\Delta S_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} \mathbf{F}^T d\mathbf{r} + \lim_{\Delta S_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \epsilon_k \Delta S_k$$

Obsérvese que la suma de las circulaciones sobre los contornos C_k es igual a la circulación sobre C (Figura 6.12) debido a que las circulaciones interiores de S se anulan mutuamente

al evaluarse en sentidos contrarios. Además, como se dijo anteriormente, $\sum_{k=1}^n \epsilon_k \Delta S_k$ es un infinitésimo, por lo que la expresión resulta:

$$\Phi_{\text{rot}} = \iint_S \text{rot}(\mathbf{F})^T \hat{\mathbf{n}} \, dS = \oint_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r}$$

Para tener en cuenta:

- Este teorema es una extensión del teorema de Green al espacio.
- Relaciona integrales de superficie (flujo del rotor) con integrales de línea (circulación).
- Es necesario que la superficie S sea **abierta** para poder aplicarlo. Si la superficie es cerrada, el flujo del rotor debe calcularse por definición.
- Una de las hipótesis exige que la curva de borde sea cerrada, simple, suave y regular a trozos. Esto se debe al cálculo de la integral de línea de un campo vectorial.

Ejemplo 6.5

Calcule el flujo del rotor aplicando el Teorema de Stokes del campo $\mathbf{F} = [-yz \ xz \ z]^T$, a través de la superficie $S : z = x^2 + y^2, z < 1$

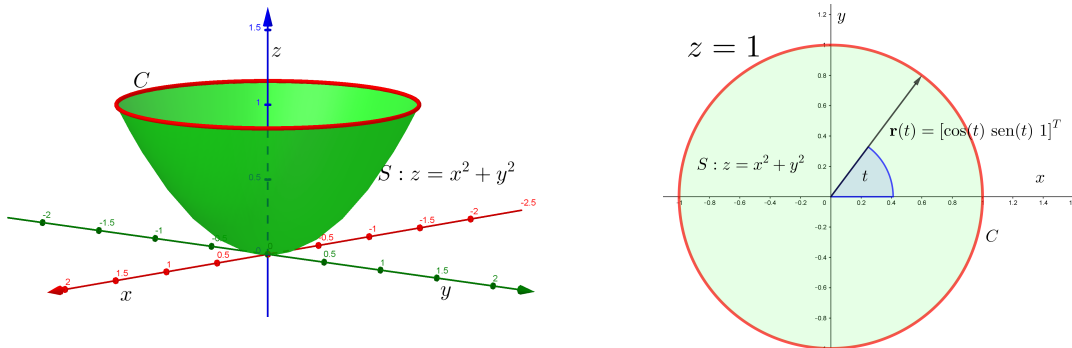


Figura 6.15: Superficie abierta S con curva de borde C

De la expresión del Teorema de Stokes:

$$\Phi_{\text{rot}} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F})^T \hat{\mathbf{n}} \, dS = \oint_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r}$$

se trabajará con el lado derecho de la igualdad. Para ello, debe parametrizarse la

curva C mediante el vector posición $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \text{sen}(t) \\ 1 \end{bmatrix}$$

El vector tangente a la curva C resulta:

$$d\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen}(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{bmatrix} dt$$

El campo vectorial $\mathbf{F} = [-yz \quad xz \quad z]^T$ en función del parámetro t resulta:

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] = \begin{bmatrix} -\text{sen}(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{bmatrix}$$

La variación de t es (vea la Figura 6.15)

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

La integral a resolver es:

$$\Phi_{\text{rot}} = \oint_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)]^T d\mathbf{r}(t) dt$$

$$\Phi_{\text{rot}} = \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} -\text{sen}(t) & \cos(t) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\text{sen}(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{bmatrix} dt$$

Resolviendo el producto escalar:

$$\Phi_{\text{rot}} = \int_0^{2\pi} \underbrace{\text{sen}^2(t) + \cos^2(t)}_1 dt = \int_0^{2\pi} 1 dt$$

Integrando:

$$\Phi_{\text{rot}} = 2\pi$$

7. Bibliografía

1. Stewart, James. Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas. 8va edición. Año 2018.
2. Apostol, Tom. Calculus Volumen II. 2da edición. Editorial Reverté. Año 2002.
3. Larson, R. E., Edwards, B. H. Calculus. 9th Edition. Brooks/Cole Cengage Learning. Año 2010.
4. Dineen, S. Mutivariate Calculus and Geometry. Springer Undergraduate Mathematics Series. Año 2014.
5. Marsden, J., Tromba, A. Cálculo Vectorial. 3ra edición. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana. Año 1991
6. Apuntes de cátedra.