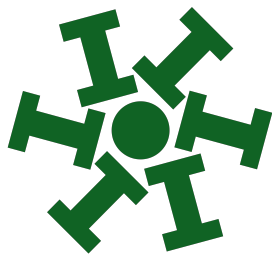


UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN JUAN



FACULTAD DE  
INGENIERÍA

Departamento de Matemática

ANÁLISIS MATEMÁTICO II - CÁLCULO II

Ing. en Agrimensura - Ing. Civil - Ing. de Minas -  
Ing. en Metalurgia Extractiva

INTEGRALES DE LÍNEA

Equipo de cátedra

Mg. Ing. Pablo G. Marcuzzi Naveda  
Ing. Leandro Di Carlo

Dra. Ing. Cecilia Fernández  
Dra. Ing. Celia Román

Año 2024

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Parametrización de curvas en el plano</b>	<b>3</b>
2.1	Segmento de Recta en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	3
2.2	Segmento de Recta en $\mathbb{R}^3$ . . . . .	4
2.3	Circunferencia . . . . .	4
2.4	Elipse . . . . .	4
2.5	Funciones definidas en forma explícita . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Integrales de línea sobre campos escalares</b>	<b>6</b>
3.1	Diferencial de arco . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Integrales de línea sobre campos vectoriales</b>	<b>10</b>
4.1	Circulación . . . . .	15
4.2	Primer teorema fundamental del cálculo integral . . . . .	16
4.3	Segundo teorema fundamental del cálculo integral . . . . .	16
4.4	Función Potencial . . . . .	17
4.5	Teorema de Green . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Bibliografía</b>	<b>25</b>

# 1. Introducción

En las integrales dobles y triples estudiadas anteriormente, los recintos de integración se encontraban incluidos en  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^3$ , dependiendo si se trataba de integrales dobles o triples. Esto podía generalizarse a  $n$  dimensiones sin demasiada dificultad.

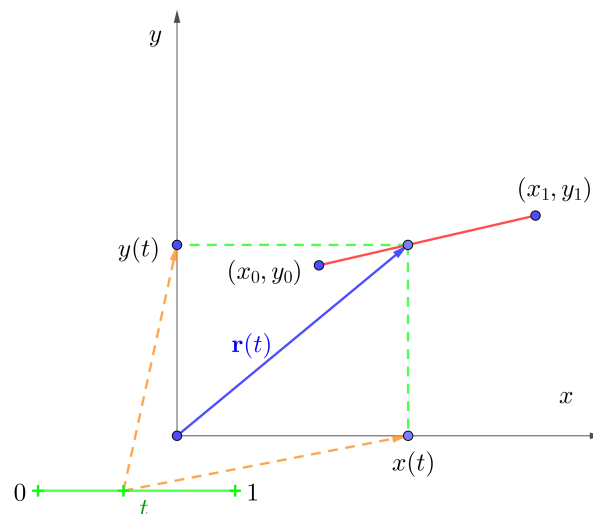
Las integrales que se desarrollarán a continuación operan sobre un recinto curvilíneo. Estas curvas pueden encontrarse incluidas en  $\mathbb{R}^n$  pero al ser parametrizadas adecuadamente, la dimensión del recinto de integración se vuelve igual a 1.

Las integrales curvilíneas son de amplia utilización en física, ingeniería y matemáticas aplicadas.

# 2. Parametrización de curvas en el plano

## 2.1. Segmento de Recta en $\mathbb{R}^2$

Sea el segmento de recta que une los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_0, y_0)$ .



La representación en función del parámetro  $t$  resulta:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix} \text{ con } 0 \leq t \leq 1$$

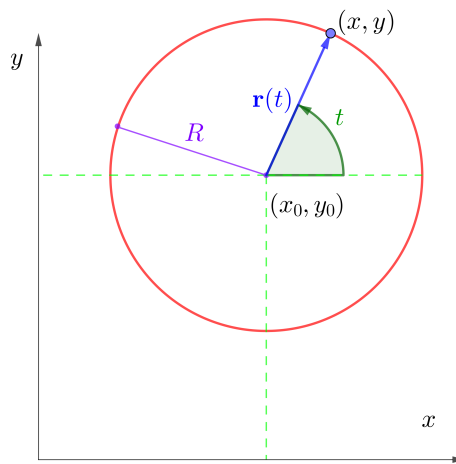
## 2.2. Segmento de Recta en $\mathbb{R}^3$

Sea el segmento de recta que une los puntos  $(x_1, y_1, z_1)$  y  $(x_0, y_0, z_0)$ . La representación en función del parámetro  $t$  resulta:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{bmatrix} \text{ con } 0 \leq t \leq 1$$

## 2.3. Circunferencia

Sea la circunferencia en el plano que tiene radio  $R$  y está centrada en el punto  $(x_0, y_0)$ .



La ecuación canónica de la circunferencia es:

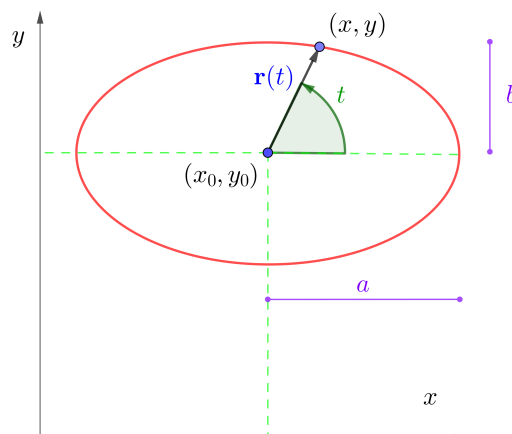
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

La parametrización como función de  $t$  resulta:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x_0 + R \cos(t) \\ y_0 + R \sin(t) \end{bmatrix}, \text{ con } 0 \leq t \leq 2\pi, x_0, y_0, R \in \mathbb{R}$$

## 2.4. Elipse

Sea la elipse en el plano que tiene semiejes  $a$  y  $b$  y centrada en el punto  $(x_0, y_0)$ .





La ecuación canónica de la elipse es:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

La parametrización como función de  $t$  resulta:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x_0 + a \cos(t) \\ y_0 + b \operatorname{sen}(t) \end{bmatrix}, \text{ con } 0 \leq t \leq 2\pi, x_0, y_0, a, b \in \mathbb{R}$$

## 2.5. Funciones definidas en forma explícita

Si se tienen funciones definidas en forma explícita del tipo  $y = f(x)$ , la parametrización es:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix}$$

La variación de  $t$  será la misma que la de  $x$ .

Análogamente, para funciones del tipo  $x = g(y)$ , el vector que parametrize a la curva será:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} g(t) \\ t \end{bmatrix}$$

La variación de  $t$  será la misma que la de  $y$ .

**Nota importante:** un segmento perteneciente a una recta de ecuación:

$$y = ax + b$$

también puede parametrizarse siguiendo el concepto de función definida en forma explícita.

Suponga el segmento de recta que une los puntos  $(x_0, y_0)$  y  $(x_1, y_1)$ . La parametrización será:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ at + b \end{bmatrix}$$

A diferencia de la primera parametrización vista para segmentos de recta en  $\mathbb{R}^2$ , aquí la variación de  $t$  será la misma que la de  $x$ , es decir  $x_0 \leq t \leq x_1$

### 3. Integrales de línea sobre campos escalares

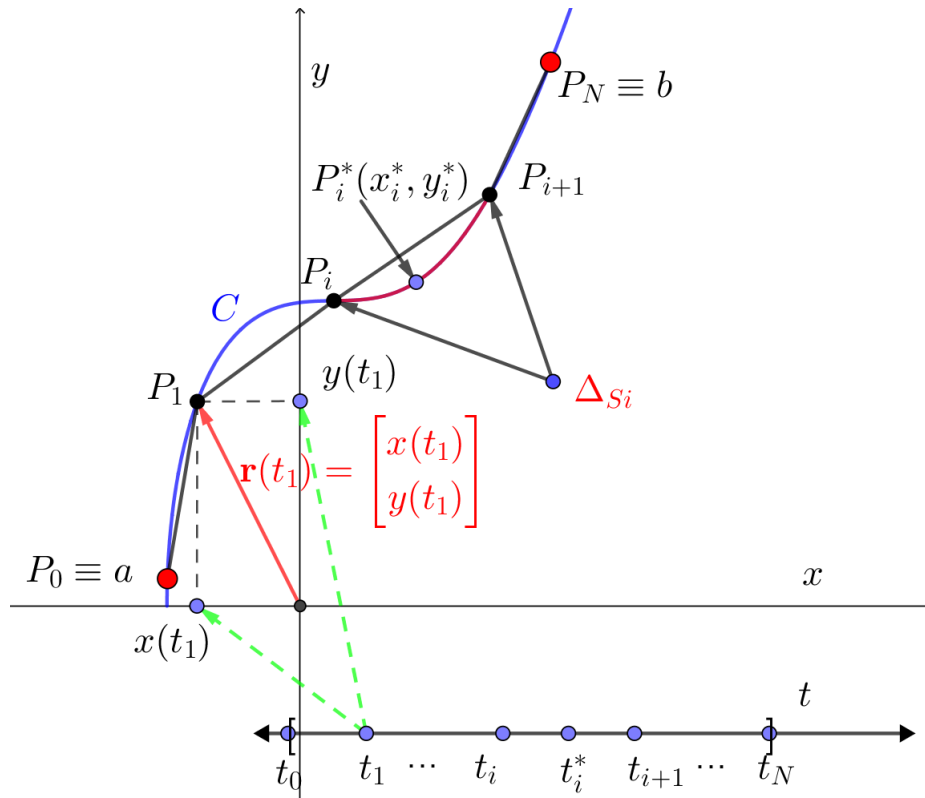
Figura 3.1: Interpretación gráfica de una integral de línea sobre un campo escalar  $f(x, y)$

Se desea calcular el área  $S$  (Ver Figura 3.1) cuya base es una curva  $C$  y altura variable  $f(x, y)$ . La curva  $C$  puede describirse mediante un vector  $\mathbf{r}$ , el cual a su vez, depende de un parámetro escalar  $t$ :

$$C : \mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \text{ con } t \in \mathbb{R}$$

Para llevar a cabo el cálculo de  $S$ , el recinto de integración (que en este caso es una curva denominada  $C$ , la cual debe ser suave) se subdivide en  $N + 1$  puntos equidistantes, dando lugar a la sucesión de puntos  $P_0$ , coincidente con el punto inicial,  $P_N$  coincidente con el punto final,  $P_{i-1}$  y  $P_i$  puntos genéricos. Cada coordenada  $(x_i, y_i)$  de los puntos  $P_i$  es una función de un parámetro escalar  $t_i$ , dada a través del vector posición  $\mathbf{r}(t_i) = [x(t_i) \ y(t_i)]^T$  con  $a \leq t_i \leq b$ .

Estos puntos dividen la curva  $C$  en  $N$  subarcos, cada uno de longitud  $\Delta_{S_1}, \Delta_{S_2}, \dots, \Delta_{S_N}$  (vea la Figura 3.2). Si se elige un punto intermedio  $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$  del  $i$ -ésimo subarco (correspondiente al valor  $t_i^*$  del subintervalo  $[t_{i-1}, t_i]$ ) y se evalúa la función escalar  $f(x, y)$  en


 Figura 3.2: Subdivisión de la curva  $C$ 

ese mismo punto, es decir  $f(x_i^*, y_i^*)$ , el área de  $S$  (vea la Figura 3.1) se puede aproximar mediante la suma:

$$S \approx \sum_{i=1}^N f(x_i^*, y_i^*) \Delta S_i$$

La cual es una suma de Riemann. Tomando límite cuando  $N$  tiende a infinito se tiene:

### Definición 3.1

Si  $f$  se encuentra definida sobre una curva suave  $C$ , representada en forma vectorial por  $\mathbf{r}(t) = [x(t) \ y(t)]^T$  con  $a \leq t \leq b$ , se define la **integral de línea** de  $f$  a lo largo de  $C$  como:

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(x_i^*, y_i^*) \Delta S_i$$

Siempre y cuando el límite exista.

### 3.1. Diferencial de arco

La cantidad  $ds$  se denomina diferencial de arco y, para una curva  $C$  dada en forma paramétrica, se determina de la siguiente manera (ver Figura 3.3):

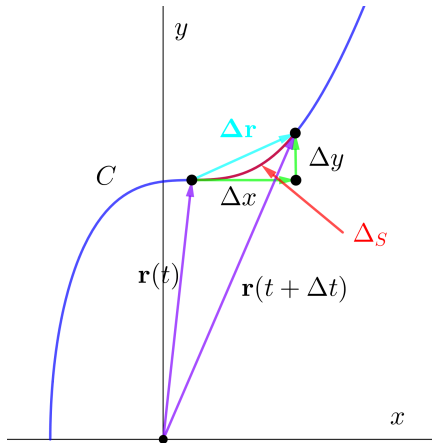


Figura 3.3: Longitud de arco

La longitud de arco  $\Delta_S$  se puede aproximar por el módulo o norma dos de la diferencia entre los vectores es decir  $\|\Delta\mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)\|$ :

$$\Delta_S \approx \|\Delta\mathbf{r}\| = \|\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)\|$$

$$\Delta_S \approx \|\Delta\mathbf{r}\| = \left\| \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} x(t + \Delta t) - x(t) \\ y(t + \Delta t) - y(t) \end{bmatrix} \right\|$$

Por definición de módulo, y dividiendo ambos términos por  $\Delta t$ :

$$\frac{\Delta_S}{\Delta t} \approx \frac{\|\Delta\mathbf{r}\|}{\Delta t} = \frac{\sqrt{[x(t + \Delta t) - x(t)]^2 + [y(t + \Delta t) - y(t)]^2}}{\Delta t}$$

Operando:

$$\frac{\Delta_S}{\Delta t} \approx \frac{\|\Delta\mathbf{r}\|}{\Delta t} = \sqrt{\frac{[x(t + \Delta t) - x(t)]^2 + [y(t + \Delta t) - y(t)]^2}{\Delta t^2}}$$

$$\frac{\Delta_S}{\Delta t} \approx \frac{\|\Delta\mathbf{r}\|}{\Delta t} = \sqrt{\left[ \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right]^2 + \left[ \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right]^2}$$

Tomando el límite cuando  $\Delta t$  tiende a cero:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_S}{\Delta t} \approx \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\|\Delta\mathbf{r}\|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\left[ \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right]^2 + \left[ \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right]^2}$$

Por propiedades de límites:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_S}{\Delta t} \approx \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\|\Delta\mathbf{r}\|}{\Delta t} = \sqrt{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \right]^2 + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \right]^2}$$

Si el límite existe (y existe porque se supuso una curva  $C$  suave), los cocientes del lado izquierdo de la expresión resultan iguales (examine la Figura 3.3) y por definición de

derivada, se tiene:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Por lo tanto, el diferencial de arco resulta:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Reemplazando en la expresión de la Definición 3.1 y teniendo en cuenta la variación del parámetro  $t$  (ver Figura 3.2), se tiene:

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f[x(t), y(t)] \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Note que la expresión  $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$  corresponde al módulo de un vector tangente a la curva  $C$ , el cual se llamará  $\mathbf{r}'(t)$ . Su norma 2 o módulo se denotará como  $\|\mathbf{r}'(t)\|$ .

Con esta nueva notación, la integral de línea para campos escalares será:

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f[\mathbf{r}(t)] \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_a^b f[x(t), y(t)] \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

Si la expresión  $f(x, y)$  representa la densidad por unidad de longitud (por ejemplo de una cuerda o alambre), al resolver la integral

$$\int_C f(x, y) ds$$

se estará hallando la masa de esa cuerda o alambre cuya forma será igual a la curva  $C$ .

### Ejemplo 3.1

Calcular la integral de línea:

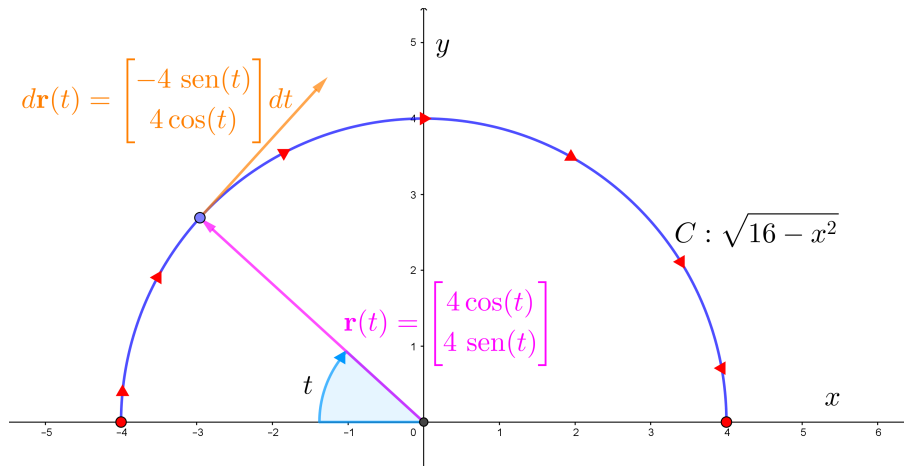
$$\int_C (x^2 + y^2) ds \text{ siendo } C : y = \sqrt{16 - x^2} \text{ recorrida en sentido negativo}$$

La curva  $C$  se observa en la Figura 3.4. El vector  $\mathbf{r}(t)$  que parametriza la curva es:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 4 \cos(t) \\ 4 \operatorname{sen}(t) \end{bmatrix}$$

El vector  $\mathbf{r}'(t)$ , tangente a la curva se obtiene derivando las componentes de  $\mathbf{r}(t)$  con respecto a  $t$ :

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{bmatrix} -4 \operatorname{sen}(t) \\ 4 \cos(t) \end{bmatrix} dt$$


 Figura 3.4: Curva  $C : y = \sqrt{16 - x^2}$ 

El módulo del vector tangente es:

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{[-4 \operatorname{sen}(t)]^2 + [4 \operatorname{cos}(t)]^2}$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{16 \operatorname{sen}^2(t) + 16 \operatorname{cos}^2(t)} = 4$$

El campo escalar, en función del parámetro  $t$  resulta:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow f[\mathbf{r}(t)] = [4 \operatorname{cos}(t)]^2 + [4 \operatorname{sen}(t)]^2$$

$$f[\mathbf{r}(t)] = 16 \operatorname{cos}^2(t) + 16 \operatorname{sen}^2(t) = 16$$

Resta indicar la variación del parámetro  $t$ , que como se vió en la Figura 3.4 es un ángulo que comienza en  $\pi$  y termina en 0 (para recorrer la curva en sentido negativo).

La integral a resolver es:

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f[x(t), y(t)] \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Reemplazando:

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{\pi}^0 16 \cdot 4 dt = -64\pi$$

## 4. Integrales de línea sobre campos vectoriales

En esta sección se analizarán las integrales de línea aplicadas sobre campos vectoriales. Recordando de Física, el trabajo  $W$  realizado por una fuerza  $F$ , al mover un objeto una distancia  $d$ , podía expresarse como:

$$W = Fd$$

Esta ecuación era válida si la distancia  $d$  estaba contenida sobre una recta, y si la fuerza  $F$  aplicada sobre el objeto era constante, es decir ambos eran escalares o vectores con una sola componente:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} = F$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix} = d$$

En el caso de que la fuerza  $\mathbf{F}$  tenga una inclinación  $\alpha$  con respecto al vector de distancia  $\mathbf{d}$ , se tendrá:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{F}\| \cos(\alpha) \\ \|\mathbf{F}\| \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix}$$

Debido a que  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{d}$  son vectores, el trabajo realizado se calculará como el producto escalar entre ambos:

$$W = \mathbf{F}^T \mathbf{d} = [\|\mathbf{F}\| \cos(\alpha) \quad \|\mathbf{F}\| \sin(\alpha)] \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix} = \|\mathbf{F}\| d \cos(\alpha)$$

Si bien se logró dar un paso más en la expresión para calcular el trabajo  $W$ , esta expresión sigue siendo restrictiva para trayectorias no lineales y para campos vectoriales no variables punto a punto. Por esta razón, se tomará el siguiente campo vectorial:

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{bmatrix}$$

el cual varía punto a punto en  $\mathbb{R}^2$ . Además se asume que sus componentes  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$  son funciones continuas en  $\mathbb{R}^2$ .

Se necesita calcular el trabajo efectuado por este campo vectorial  $\mathbf{F}$  al actuar sobre una partícula mientras recorre una trayectoria  $C$  suave y regular a trozos. Para ello, al igual que se hizo en la Sección 3, se dividirá a la curva  $C$  en  $N + 1$  puntos igualmente espaciados, tal como se muestra en la Figura 4.1. Esta subdivisión generará  $N$  subarcos de longitud  $\Delta_{S_i}$ .

Evaluando el campo vectorial en un punto intermedio  $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$  del  $i$ -ésimo subarco (correspondiente al valor  $t_i^*$  del subintervalo  $[t_{i-1}, t_i]$ ), es decir  $\mathbf{F}(x_i^*, y_i^*)$ , la fuerza puede considerarse constante a lo largo del subarco. Si  $\Delta_{S_i}$  es pequeño, cuando la partícula

se mueva desde  $P_{i-1}$  a  $P_i$  lo hará en la dirección de la tangente, indicada por el vector tangente unitario a la curva en  $P_i^*$ ,  $\mathbf{T}(x_i^*, y_i^*)$ .

Por lo tanto el trabajo realizado por este campo  $\mathbf{F}$  sobre una partícula al recorrer el segmento de arco  $\Delta S_i$  resulta:

$$\Delta W = \left[ \mathbf{F}(x_i^*, y_i^*)^T \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*) \right] \Delta S_i$$

Para obtener el trabajo total  $W$ , se suma a lo largo de toda la curva:

$$W \approx \sum_{i=1}^N \left[ \mathbf{F}(x_i^*, y_i^*)^T \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*) \right] \Delta S_i$$

Tomando límite cuando el número de puntos en los que se ha dividido el intervalo tiende a infinito se tiene:

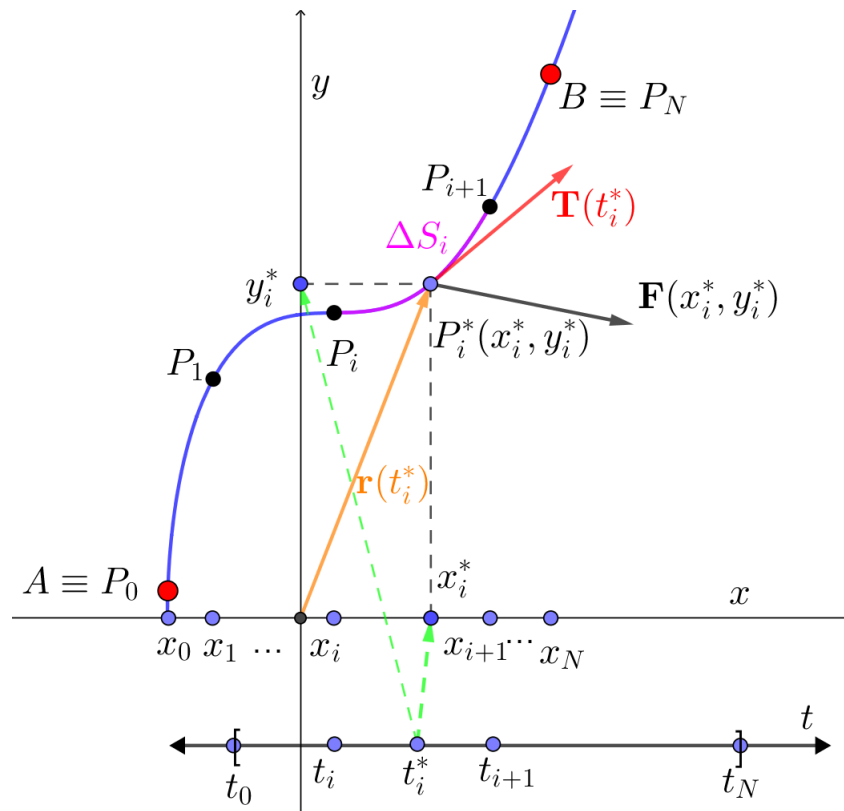
#### Definición 4.1

Sea  $\mathbf{F}(x, y) = [P(x, y) \quad Q(x, y)]^T$  un campo vectorial continuo, definido sobre una curva suave  $C$ , la cual puede ser representada en forma vectorial por  $\mathbf{r}(t) = [x(t) \quad y(t)]^T$  con  $a \leq t \leq b$ , se define el **trabajo** realizado por  $\mathbf{F}$  sobre una partícula al recorrer la curva  $C$  como:

$$W = \int_C \mathbf{F}^T \mathbf{T} ds = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \left[ \mathbf{F}(x_i^*, y_i^*)^T \mathbf{T}(x_i^*, y_i^*) \right] \Delta S_i$$

Siempre y cuando el límite exista.




 Figura 4.1: Subdivisión de la curva  $C$ 

Al igual que en la Sección 3, la parametrización de la curva  $C$  se planteó mediante el vector  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ , por lo que el vector tangente unitario tiene por expresión:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

Reemplazando las expresiones de  $\mathbf{T}(t)$  y de  $ds$  halladas en la Sección 3.1, se tiene:

$$W = \int_C \mathbf{F}^T \mathbf{T} ds = \int_a^b \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)]^T \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \|\mathbf{r}'(t)\| dt$$

Cancelando las normas de los vectores tangentes (que valen 1), se obtiene la expresión:

$$W = \int_C \mathbf{F}^T \mathbf{T} ds = \int_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)]^T \mathbf{r}'(t) dt$$

Donde  $d\mathbf{r} = \mathbf{T} ds = \mathbf{r}'(t) dt$ .

#### Ejemplo 4.1

Un hombre que pesa 85 Kgf asciende por una escalera helicoidal. Da tres vueltas completas y transporta una lata de pintura de 10 Kgf. Si la ecuación paramétrica de

la escalera es (ver Figura 4.2):

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 3 \cos(t) \\ 3 \sin(t) \\ 0.5t \end{bmatrix}$$

¿Cuál es el trabajo que efectúa el hombre en contra de la gravedad para subir por la escalera?

Figura 4.2: Escalera helicoidal

Como la dirección del campo gravitatorio en cercanías de la superficie es  $-\mathbf{k}$ , el campo vectorial actuante es:

$$\mathbf{F} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 85 + 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -95 \end{bmatrix}$$

La escalera helicoidal se encontraba parametrizada por el vector:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} 3 \cos(t) \\ 3 \operatorname{sen}(t) \\ 0.5t \end{bmatrix}$$

El vector tangente a la escalera resulta:

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{bmatrix} -3 \operatorname{sen}(t) \\ 3 \cos(t) \\ 0.5 \end{bmatrix} dt$$

La variación del parámetro  $t$  debe ser tal que permita al hombre (punto  $P$  en la Figura 4.2) dar tres vueltas completas a la escalera. Debido a que  $t$  funciona como un ángulo en la parametrización, se sabe que una vuelta completa a la circunferencia son  $2\pi$  radianes; 3 vueltas serán  $6\pi$  radianes (para  $n$  vueltas deberá integrarse hasta  $2n\pi$  radianes)

La integral a resolver es:

$$W = \int_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}[\mathbf{r}(t)]^T \mathbf{r}'(t) dt$$

Reemplazando:

$$W = \int_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r} = \int_0^{6\pi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -95 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \operatorname{sen}(t) \\ 3 \cos(t) \\ 0.5 \end{bmatrix} dt = \int_0^{6\pi} -47.5 dt$$

Integrando:

$$W = -47.5 \int_0^{6\pi} dt = -285\pi$$

## 4.1. Circulación

La integral de línea de un campo vectorial  $\mathbf{F}(x, y) = [P(x, y) \ Q(x, y)]^T$  alrededor de una curva cerrada simple  $C = [dx \ dy]^T$  se dice que es la circulación de  $\mathbf{F}(x, y)$  en  $C$ ; esto es:

$$\text{circulación} = \oint_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r}$$

En particular, si  $\mathbf{F}$  es un campo de velocidades de un fluido, entonces la circulación es una medida de la cantidad con la cual el fluido tiende a hacer girar la curva  $C$  en sentido opuesto al del reloj. De esta manera, se tiene:

- Si  $\oint_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r} > 0$  implica que el fluido tiende a hacer girar  $C$  en sentido antihorario.
- Si  $\oint_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r} < 0$  implica que el fluido tiende a hacer girar  $C$  en sentido horario.

## 4.2. Primer teorema fundamental del cálculo integral

### Teorema 4.1

Sea  $\mathbf{F} = [P(x, y) \ Q(x, y)]^T$  un campo vectorial continuo, que admite derivadas parciales primeras. Sea  $\mathbf{r}(t) = [x(t) \ y(t)]^T$  la representación paramétrica de un camino regular a trozos contenido en un conjunto  $D$  abierto y simplemente conexo, el cual está contenido en el dominio de  $\mathbf{F}$ , si existe un campo escalar  $\phi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{x}} \mathbf{F}^T d\mathbf{r}$ , entonces  $\nabla\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{F}$ , con  $\mathbf{x} = (x, y)$  y  $\mathbf{a} = (a, b)$ .

## 4.3. Segundo teorema fundamental del cálculo integral

### Teorema 4.2

Sea  $\mathbf{F}(x, y) = [P(x, y) \ Q(x, y)]^T$  un campo vectorial continuo en una región  $D$  abierta y conexa en  $\mathbb{R}^2$ ,  $\phi(x, y)$  un campo escalar continuo con derivadas parciales continuas y  $\mathbf{F} = \nabla\phi = \left[ \frac{\partial\phi}{\partial x} \ \frac{\partial\phi}{\partial y} \right]^T$ . En estas condiciones, para todo par de puntos  $A$  y  $B$  pertenecientes a  $D$  y para toda curva  $C$  regular a trozos que une  $A$  con  $B$ , el valor de la  $\int_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r}$  es independiente de la trayectoria. Esto significa:

$$\int_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r} = \int_A^B P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_A^B \nabla\phi^T d\mathbf{r} = \phi(B) - \phi(A)$$

### Demostración

Por hipótesis, se tiene:

$$\int_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r} = \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_C \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy$$

Si se multiplica y divide por  $dt$  la última integral:

$$\int_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r} = \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_C \left[ \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right] dt$$

Por otra parte, se considera a  $x$  y a  $y$  como funciones de  $t$ , es decir  $x = x(t)$  y  $y = y(t)$ ,

la expresión de  $\frac{d\phi}{dt}$  resulta:

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

La última expresión es igual a la encerrada entre corchetes de la integral, por lo tanto:

$$\int_C \left[ \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right] dt = \int_{t_a}^{t_b} \frac{d\phi}{dt} dt$$

Por ser operaciones inversas la derivación e integración:

$$\int_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r} = \int_{t_a}^{t_b} \frac{d\phi}{dt} dt = \phi[x(t), y(t)]|_{t_a}^{t_b}$$

Aplicando la regla de Barrow:

$$\int_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r} = \phi[x(t_b), y(t_b)] - \phi[x(t_a), y(t_a)] = \phi(B) - \phi(A)$$

#### 4.4. Función Potencial

##### Teorema 4.3

Dado  $\mathbf{F}(x, y, z) = [P(x, y, z) \ Q(x, y, z) \ R(x, y, z)]^T$  continuo con derivadas parciales primeras y segundas continuas en un conjunto simplemente conexo que contiene a la curva  $C$ , la cual es regular a trozos. El campo vectorial  $\mathbf{F}$  admitirá función potencial  $\phi$ , cuya expresión es:

$$\phi = \int_a^x P(x, b, c) dx + \int_b^y Q(x, y, c) dy + \int_c^z R(x, y, z) dz$$

si y solo si

$$\frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial x}; \quad \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial x}; \quad \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial z}$$

##### Demostración

Por el Teorema 4.1, si existe la función potencial  $\phi$ , debe cumplirse:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = P; \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = Q; \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = R$$

Por otra parte, se tiene que las derivadas cruzadas son iguales por cumplirse el Teo-

rema de Clairaut:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \end{cases}$$

Esta igualdad se cumple para los demás casos.

Se determinará la función potencial  $\phi$  del campo vectorial  $\mathbf{F}$  calculando la integral de línea  $\int_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r}$  a lo largo de la poligonal que une los puntos  $(a, b, c)$  con  $(x, y, z)$ , tal como se muestra en la Figura 4.3.

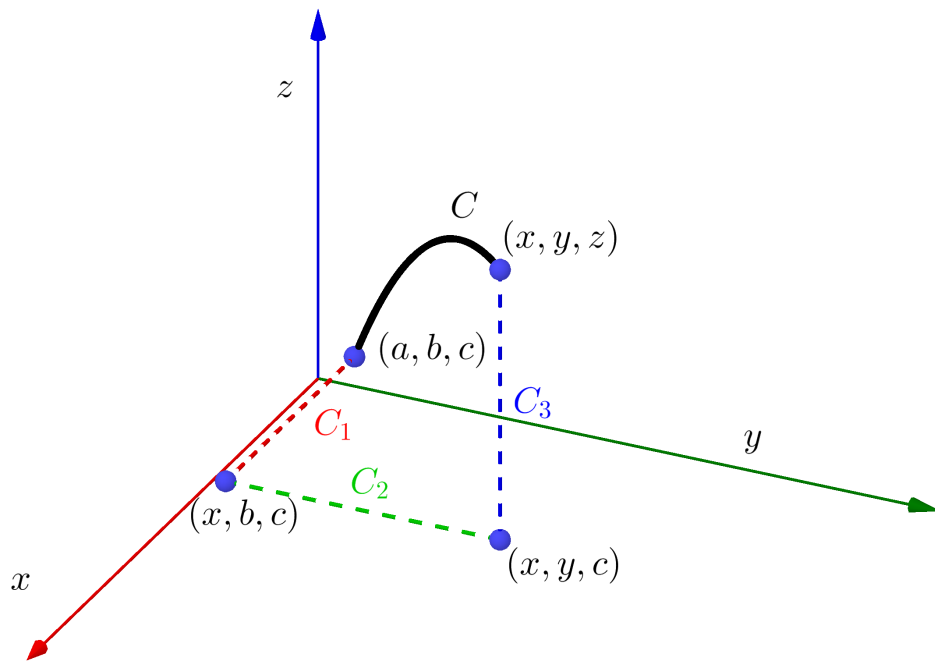


Figura 4.3: Poligonal compuesta por  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  que une  $(a, b, c)$  con  $(x, y, z)$

La primer curva que forma la poligonal se puede escribir como:

$$C_1 : \begin{cases} x = x \text{ (parámetro)} \\ y = b \text{ (constante)} \\ z = c \text{ (constante)} \end{cases}$$

El vector posición  $\mathbf{r}_1$  tendrá como parámetro a la variable  $x$ :

$$\mathbf{r}_1(x) = \begin{bmatrix} x \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

El vector tangente a la curva es igual a la derivada del vector posición con respecto al parámetro  $x$ :

$$d\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = dx \mathbf{i}$$

La variación del parámetro es  $a \leq x \leq x$ . Este razonamiento es análogo para las curvas  $C_2$  y  $C_3$ :

$$C_2 : \begin{cases} x = x \text{ (fijo, constante)} \\ y = y \text{ (parámetro)} & b \leq y \leq y; \mathbf{dr}_2 = dy \mathbf{j} \\ z = c \end{cases}$$

$$C_3 : \begin{cases} x = x \text{ (fijo, constante)} \\ y = y \text{ (fijo, constante)} & c \leq z \leq z; \mathbf{dr}_3 = dz \mathbf{k} \\ z = z \text{ (parámetro)} \end{cases}$$

Se calculará  $\int_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}^T d\mathbf{r}_1 + \int_{C_2} \mathbf{F}^T d\mathbf{r}_2 + \int_{C_3} \mathbf{F}^T d\mathbf{r}_3$

- Para la curva  $C_1$ :

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}(x)] = \begin{bmatrix} P(x, b, c) \\ Q(x, b, c) \\ R(x, b, c) \end{bmatrix} \quad d\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \therefore$$

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}(x)]^T d\mathbf{r}_1 = P(x, b, c) dx$$

- Para la curva  $C_2$ :

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}(y)] = \begin{bmatrix} P(x, y, c) \\ Q(x, y, c) \\ R(x, y, c) \end{bmatrix} \quad d\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ dy \\ 0 \end{bmatrix} \therefore$$

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}(y)]^T d\mathbf{r}_2 = Q(x, y, c) dy$$

- Para la curva  $C_3$ :

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}(z)] = \begin{bmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{bmatrix} \quad d\mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ dz \end{bmatrix} \quad \therefore$$

$$\mathbf{F}[\mathbf{r}(z)]^T d\mathbf{r}_3 = R(x, y, z) dz$$

Sumando los tres resultados, se obtiene:

$$\int_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r} = \int_a^x P(x, b, c) dx + \int_b^y Q(x, y, c) dy + \int_c^z R(x, y, z) dz$$

Que por definición, es igual a la función potencial  $\phi$ :

$$\int_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r} = \int_a^x P(x, b, c) dx + \int_b^y Q(x, y, c) dy + \int_c^z R(x, y, z) dz = \phi$$

Resta comprobar que se cumpla el Teorema 4.1. Solamente se comprobará la igualdad  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = P(x, y, z)$ . Las demás se dejarán como ejercicio teórico para el estudiante.

Partiendo de la expresión de  $\phi$ :

$$\phi = \int_a^x P(x, b, c) dx + \int_b^y Q(x, y, c) dy + \int_c^z R(x, y, z) dz$$

Se deriva parcialmente con respecto a  $x$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \int_a^x P(x, b, c) dx}_{\text{Por hip. del Teorema 4.1}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \int_b^y Q(x, y, c) dy}_{\text{prop. de int. y deriv.}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \int_c^z R(x, y, z) dz}_{\text{prop. de int. y deriv.}}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P(x, b, c) + \underbrace{\int_b^y \frac{\partial Q(x, y, c)}{\partial x} dy}_{\text{por hip. } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}} + \underbrace{\int_c^z \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial x} dz}_{\text{por hip. } \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}}$$

Se tiene:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P(x, b, c) + \underbrace{\int_b^y \frac{\partial P(x, y, c)}{\partial y} dy + \int_c^z \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z} dz}_{\text{Por ser integrales y derivadas operaciones inversas}}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P(x, b, c) + P(x, y, c)|_b^y + P(x, y, z)|_c^z$$

Aplicando la regla de Barrow:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P(x, b, c) + P(x, y, c) - P(x, b, c) + P(x, y, z) - P(x, y, c)$$



Finalmente:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P(x, y, z)$$

### Ejemplo 4.2

Dado el campo vectorial  $\mathbf{F} = [y^2 \quad 2xy + z^2 \quad 2yz]^T$ . Determine la función potencial y resuelva:

$$\int_{(0,1,0)}^{(1,1,-1)} \mathbf{F}^T d\mathbf{r}$$

La función potencial se calcula como:

$$\phi = \int_a^x P(x, b, c) dx + \int_b^y Q(x, y, c) dy + \int_c^z R(x, y, z) dz$$

Reemplazando:

$$\phi = \int_a^x b^2 dx + \int_b^y (2xy + c^2) dy + \int_c^z 2yz dz$$

Integrando cada uno de los términos según la variable que corresponda:

$$\phi = b^2 x \Big|_a^x + (xy^2 + c^2 y) \Big|_b^y + yz^2 \Big|_c^z$$

Aplicando la regla de Barrow:

$$\phi = b^2 x - b^2 a + xy^2 + c^2 y - xb^2 - c^2 b + yz^2 - yc^2$$

La función potencial resulta:

$$\phi = xy^2 + yz^2 + C$$

Para calcular

$$\int_{(0,1,0)}^{(1,1,-1)} \mathbf{F}^T d\mathbf{r}$$

se aplica el Teorema 4.2:

$$\int_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r} = \int_A^B P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \int_A^B \nabla \phi^T d\mathbf{r} = \phi(B) - \phi(A)$$

Esto no implica más que reemplazar las coordenadas de los puntos final e inicial en la función potencial hallada y realizar la diferencia:

$$\int_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r} = \phi(B) - \phi(A) = \phi(1, 1, -1) - \phi(0, 1, 0)$$

Es decir:

$$\int_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r} = 1 \cdot 1^2 + 1(-1)^2 + C - (0 \cdot 1^2 + 1 \cdot 0^2 + C) = 2$$

## 4.5. Teorema de Green

### Teorema 4.4

Sea  $\mathbf{F} = [P(x, y) \ Q(x, y)]^T$  un campo vectorial con derivadas parciales primeras continuas en un conjunto simplemente conexo  $D$  del plano  $xy$ . Sea  $C$  una curva regular a trozos. Si se representa por  $R$  a la región que encierra  $C$ , se tiene entonces la identidad:

$$\iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy = \oint_C P \, dx + Q \, dy = \oint_C \mathbf{F}^T d\mathbf{r}$$

Como convención, la integral de línea se tomará alrededor de  $C$  en sentido contrario al de las agujas del reloj.

### Demostración

Se busca demostrar:

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} dx \, dy = \oint_C Q \, dy; \quad - \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx \, dy = \oint_C P \, dx$$

La región  $R$  mostrada en la Figura 4.4 está definida como:

$$R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

siendo  $g_1(x)$  y  $g_2(x)$  continuas en el intervalo  $[a, b]$  y además  $g_1(x) \leq g_2(x)$

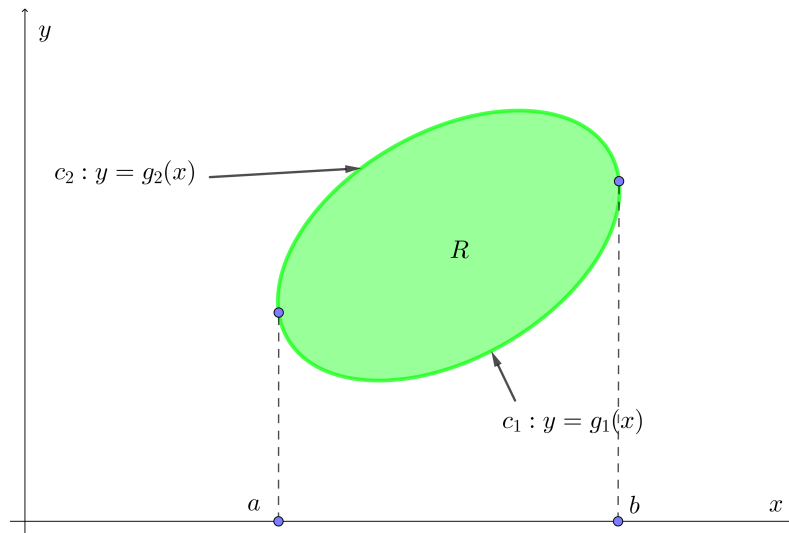


Figura 4.4: Demostración Teorema de Green

Se calculará la integral  $-\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$  considerando a  $x$  como constante:

$$\begin{aligned}
 -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= -\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx \\
 -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= -\left[ \int_a^b P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x)) dx \right] \\
 -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b P(x, g_1(x)) dx + \int_b^a P(x, g_2(x)) dx
 \end{aligned}$$

Por otro lado, la integral de línea  $\oint_C P dx$ , puede expresarse como:

$$\oint_C P dx = \int_{C_1} P dx + \int_{C_2} P dx$$

Para calcularla, se utiliza la representación paramétrica de  $C_1$ :

$$\mathbf{r}(x) = \begin{bmatrix} x \\ g_1(x) \end{bmatrix}$$

$$\int_{C_1} P dx = \int_a^b P[x, g_1(x)] dx$$

Para  $C_2$ :

$$\mathbf{r}(x) = \begin{bmatrix} x \\ g_2(x) \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta la inversión del sentido, se tiene

$$\int_{C_2} P \, dx = - \int_a^b P [x, g_2(x)] \, dx = \int_b^a P [x, g_2(x)] \, dx$$

Por lo tanto:

$$\int_C P \, dx = \int_a^b P [x, g_1(x)] \, dx - \int_a^b P [x, g_2(x)] \, dx$$

$$\int_C P \, dx = \int_a^b P [x, g_1(x)] \, dx + \int_b^a P [x, g_2(x)] \, dx$$

Comparando este resultado con el obtenido en:

$$- \iint_R \frac{\partial P}{\partial y} \, dx \, dy = \int_a^b P [x, g_1(x)] \, dx + \int_b^a P [x, g_2(x)] \, dx$$

Con lo que el teorema queda demostrado.

### Ejemplo 4.3

Calcule la integral curvilínea  $\int_C \mathbf{F}^T \, d\mathbf{r}$ , si  $\mathbf{F} = [(e^x + 2y) \quad [x^2 + \text{sen}(y)]]^T$ , siendo  $C$  el rectángulo de vértices  $(2, 1)$ ,  $(6, 1)$ ,  $(6, 4)$  y  $(2, 4)$  mostrado en la Figura 4.5

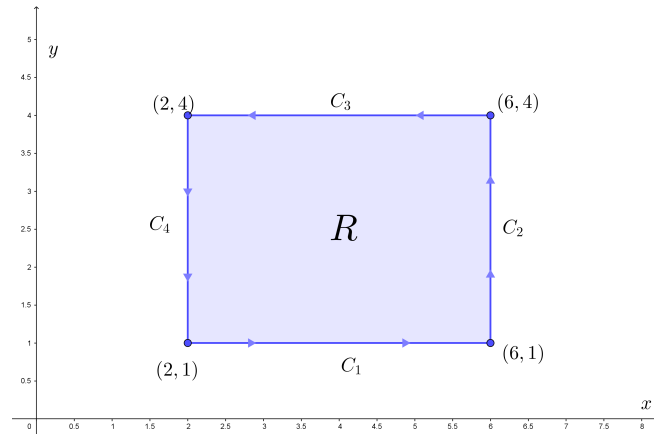


Figura 4.5: Curva cerrada

El trabajo realizado por  $\mathbf{F}$  a lo largo de  $C$  se calcula como:

$$W = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy$$

Las derivadas del campo vectorial son:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial[x^2 + \text{sen}(y)]}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(e^x + 2y)}{\partial y} = 2$$

Los límites de las variables son:  $2 \leq x \leq 6$  y  $1 \leq y \leq 4$

La integral a resolver resulta:

$$W = \int_2^6 \int_1^4 2x - 2 \, dy \, dx$$

$$W = \int_2^6 (2xy - 2y)|_1^4 \, dx = \int_2^6 (8x - 8) - (2x - 2) \, dx$$

$$W = \int_2^6 (6x - 6) \, dx = (3x^2 - 6x)|_2^6 = 72$$

## 5. Bibliografía

1. Stewart, James. Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas. 8va edición. Año 2018.
2. Apostol, Tom. Calculus Volumen II. 2da edición. Editorial Reverté. Año 2002.
3. Larson, R. E., Edwards, B. H. Calculus. 9th Edition. Brooks/Cole Cengage Learning. Año 2010.
4. Dineen, S. Mutivariate Calculus and Geometry. Springer Undergraduate Mathematics Series. Año 2014.
5. Marsden, J., Tromba, A. Cálculo Vectorial. 3ra edición. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana. Año 1991
6. Apuntes de cátedra.