Guía Práctica 0 - Repaso

1. Dé un ejemplo de un conjunto de vectores linealmente dependiente y otro linealmente independiente.

2. Teniendo en cuenta que $x, y \in \mathbb{R}$, identifique los escalares, los vectores de $\mathbb{R}^2$ y los vectores de $\mathbb{R}^3$. (Recuerde que $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ son los versores directores de los ejes coordenados x, y y z, respectivamente).

   a) $3x + y^2 - \frac{3}{4}$.

   b) $x\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$.

   c) $[x \qquad y+7]^T$.

   d) $\mathbf{i} - x\mathbf{j} + \frac{1}{5}x\mathbf{k}$.

   e) $\sqrt{25 - x^2 - y^2}$.

   f) $\begin{bmatrix} x \\ y+2 \\ 4 \end{bmatrix}$

3. Dados los vectores $\mathbf{v}_1 = [a\ b\ c]^T$, $\mathbf{v}_2 = [d\ e\ f]^T$ y $\mathbf{v}_3 = [g\ h\ i]^T$ y los escalares α y β, realice (o verifique) las siguientes operaciones:

   a) $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$

   b) $(\alpha + \beta)\mathbf{v}_2 = \alpha\mathbf{v}_2 + \beta\mathbf{v}_2$

   c) $\alpha(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \alpha\mathbf{v}_2 + \alpha\mathbf{v}_3$

   d) $\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\| < \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|$

4. Calcule la distancia entre los puntos y los ángulos formados entre vectores.

   a) $P_0(2, 1, -1)$ y $P_1(3, 5, 0)$

   b) $P_0(5, 8, 3)$ y $P_1(1, 0, 0)$

   c) $P_0(-1, 7, 0)$ y $P_1(4, 4, 3)$

   d) $P_0(0, 0, 1)$ y $P_1(0, 1, 0)$

5. Para cada vector no unitario, calcule el versor $\mathbf{u}$, asociado al mismo.

   a) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

   b) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(\pi) \\ \cos(0) \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

6. Calcule el producto escalar (producto punto), entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, dada la siguiente información:

   a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

   b) $|\mathbf{u}| = 3$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es de $60°$

   c) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{u}$ es el vector que tiene a $P = (1, 1, 1)$ y $Q = (-3, -1, 2)$ como punto inicial y final, respectivamente

7. Calcule el producto vectorial (producto cruz), entre los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ del primer y último apartados del ejercicio anterior.

8. Dados los vectores $\mathbf{a} = [1, 2, 3]$, $\mathbf{b} = [-1, -3, 4]$ y $\mathbf{c} = [3, 2, 5]$, calcular el producto mixto entre ellos.

9. Grafique las siguientes curvas en el plano e identifíquelas, cuando sea posible.

   a) $x + y - 3 = 0$.

   b) $1 = \dfrac{y}{x^2 - 1}$.

   c) $\sqrt{9 - x^2 - y^2} = 0$.

   d) $\sqrt{4 - 4x^2 - y^2} = 0$.

10. Encuentre la ecuación de la recta, dados los siguientes datos. Grafique.

    a) Pasa por el punto $(1, -2)$ y es paralela a la recta de ecuación $2x + \dfrac{y}{3} - 1 = 0$.

    b) Pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a la recta de ecuación $2x + \dfrac{y}{3} - 1 = 0$.

    c) Pasa por los puntos $(1, -2)$ y $\left(\dfrac{1}{2}, -1\right)$.

11. Grafique las superficies y sombree la región correspondiente.

    a) $R : \begin{cases} y \geq x - 1 \\ y \leq \sqrt{x} \end{cases}$

b) $R: \begin{cases} y \leq \cos x \\ y \geq 0 \\ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

12. Identifique y grafique las siguientes superficies de $\mathbb{R}^3$.

   a) $z = 4 - x$

   b) $2x + y + z = 4$

   c) $x^2 + y^2 = z$

   d) $x^2 + y^2 = z^2$

   e) $x^2 + y^2 = 9$

   f) $x^2 + y^2 = 2y$

   g) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

   h) $x^2 + z^2 = y$

   i) $y^2 + z^2 = 4$

   j) $z = 4 - x^2 - y^2$

   k) $z^2 = 4 - x^2 - y^2$

   l) $x = 5$

   m) $y = x - 1$

   n) $4x^2 + y^2 + 16z^2 = 16$

13. Parametrice las siguientes curvas:

   a) El segmento de la recta de ecuación $y = x$, desde $P_1 = (0, 0)$ hasta $P_2 = (1, 1)$.

   b) $C : x = y^3$, desde $P_1 = (1, 1)$ hasta $P_2 = (8, 2)$.

   c) $C : (x - 1)^2 + y^2 = 1$, desde $P_1 = (1, 1)$ hasta $P_2 = (2, 0)$.

   d) $C : x^2 + 4y - 16 = 0$, desde $P_1 = (-2, 3)$ hasta $P_2 = (0, 4)$.

14. Identifique y parametrice las siguientes superficies:

   a) $x^2 + y^2 = z^2$, con $0 \leq z < 3$.

   b) $y = x^2 + z^2$, con $0 \leq y < 2$.

   c) $x^2 + y^2 + z^2 - 36 = 0$.

   d) $y^2 + z^2 = 4$, con $0 < x < 2$.

   e) $x^2 + y^2 - z = 0$, con $0 \leq z < 9$.

   f) $x^2 + y^2 = 4$, con $0 < z < 3$.

   g) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{4} = 1$.