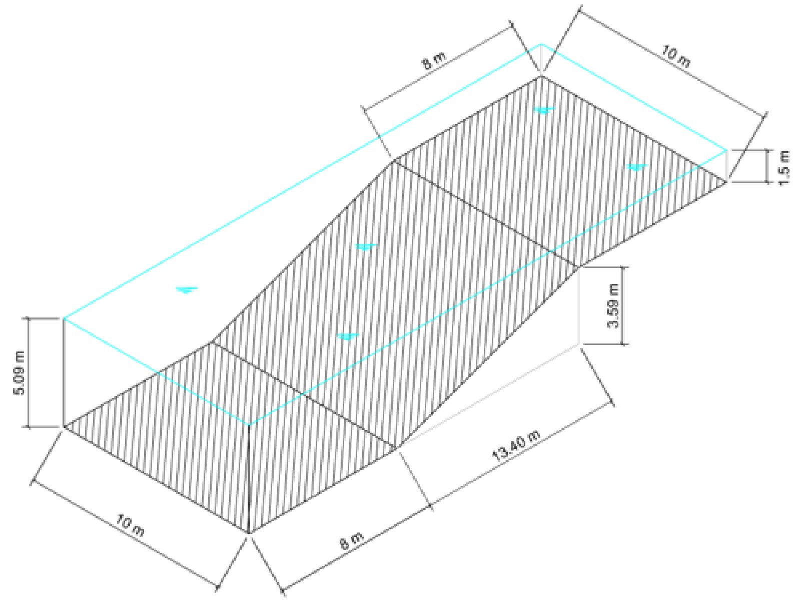
GUÍA PRÁCTICA TEMA 2: INTEGRALES DE SUPERFICIE

1. Determine la cantidad necesaria de mosaicos para tapizar el fondo de la siguiente pileta, sabiendo que entran 25 mosaicos por metro cuadrado.



2. Indique la expresión para calcular el área lateral de una superficie.

3. Calcule el área lateral de las superficies dadas a continuación.

   a) $S: 2x + y + 4z - 8 = 0$, en el primer octante.

   b) $S: x + y = 3$ con $0 \leq z < 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

   c) $S: x^2 + y^2 = z^2$, con $0 \leq z < 3$.

   d) $S: y = x^2 + z^2$, con $0 \leq y < 2$.

   e) $S: x^2 + y^2 + z^2 - 36 = 0$.

   f) $S: y^2 + z^2 = 4$, con $0 < x < 2$.

4. Calcule el flujo a través de las superficies indicadas, de los siguientes campos vectoriales:

   a) $\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 3x & 8 & z \end{bmatrix}^T$, con $S: x + y + z = 3$, en el primer octante.

   b) $\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 6x & 6y & z \end{bmatrix}^T$, con $S: x^2 + y^2 - z = 0$, con $z < 9$.

   c) $\mathbf{V}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3z^2 \end{bmatrix}^T$, con $S: x^2 + y^2 = 4$, con $0 < z \leq 3$.

   d) $\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$, siendo S la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

5. Dado el campo $\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{bmatrix}$

   a) Indique la expresión que permite calcular la divergencia.

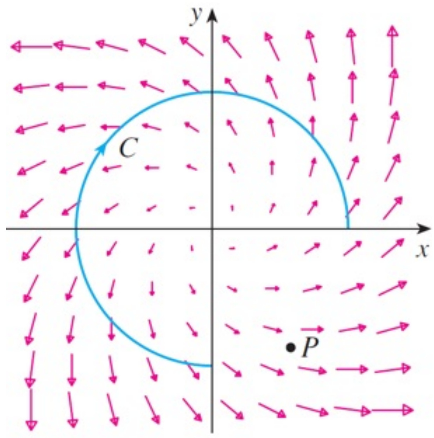
   b) ¿Cuál es la interpretación física?

6. Dado el campo $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{bmatrix}$

   a) Indique la expresión que permite calcular el rotor.

   b) ¿Cuál es la interpretación física?

7. Dada la siguiente figura en la que se encuentra representado un campo vectorial $\mathbf{F}$, una curva C y un punto P, responda:



   a) ¿La integral $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$ es positiva, negativa o cero? Justifique su respuesta.

   b) ¿La divergencia del campo en el punto P es positiva, negativa o cero? Justifique su respuesta.

   c) ¿Es un campo vectorial conservativo o no conservativo? Justifique su respuesta.

8. Sea $f(x,y,z)$ un campo escalar y $\mathbf{F}(x,y,z)$ un campo vectorial. Diga si cada una de las expresiones siguientes tiene significado. Si no es así, explique la razón. Si tienen significado, indique si el resultado es un campo escalar o vectorial.

a. $\nabla \times f$	c. $\nabla \boldsymbol{F}$	e. $\nabla \times (\nabla f)$
b. $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$	d. ∇f	f. $\nabla(\nabla \cdot f)$

9. Calcule la divergencia y el rotor del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2y - z \\ -2x + z \\ xy^2 \end{bmatrix}$. Diga si este campo es incompresible o irrotacional. Justifique.

10. Enuncie el Teorema de Gauss, distinguiendo hipótesis y tesis. Diga el tipo de integrales que relaciona.

11. Calcule el flujo de los campos siguientes a través de las superficies indicadas:

   a) $\mathbf{F}(x,y,z) = [\ e^x \quad ye^x \quad yz^2\ ]^T$, siendo S el sólido limitado por $2x + 6y - 12 = 0$, el plano $z = 3$ y los planos coordenados del primer octante.

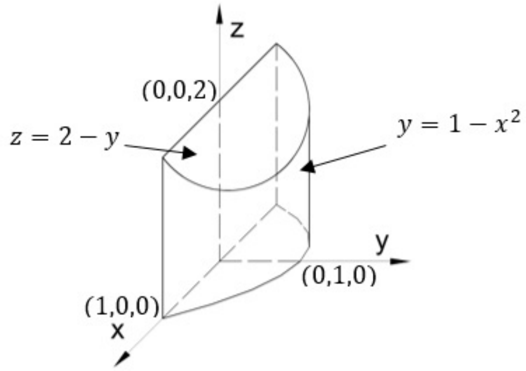
   b) $\mathbf{F}(x,y,z) = [\ xy \quad 3y^2 \quad yx^2\ ]^T$, $S : x^2 + z^2 = 16$ y $0 \le y \le 1$.

c) $\mathbf{F}(x,y,z) = [\ y \quad 0 \quad z^2\ ]^T$, siendo S el sólido limitado por $z^2 = x^2 + y^2$; $z = 2 - x^2 - y^2$ y $z > 0$.

d) $\mathbf{F}(x,y,z) = [\ xy \quad y^2 z \quad 3xz\ ]^T$, $S : x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$.

e) Resuelva el ejercicio 4.d., aplicando el teorema de la divergencia.

f) $\mathbf{F}(x,y,z) = [\ xy \quad y^2 + e^{xz^2} \quad \sin(xy)\ ]^T$, con S limitada por los planos coordenados del primer y segundo octante y las ecuaciones dadas en la figura:



12. Enuncie el Teorema de Stokes, distinguiendo hipótesis y tesis. Diga el tipo de integrales que relaciona.

13. Aplique el teorema de Stokes en forma conveniente.

a) $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} e^{xy}\cos z \\ x^2 z \\ y \end{bmatrix}$, a través de la superficie $S : x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$, con $x > 0$.

b) $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} x + y^2 \\ y + z^2 \\ z + x^2 \end{bmatrix}$, siendo C el triángulo cuyos vértices tienen las siguientes coordenadas, $P_1 = (1,0,0)$; $P_2 = (0,1,0)$; $P_3 = (0,0,1)$.

c) $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} xy^3 z \\ \sin(xyz) \\ xyz \end{bmatrix}$, $S : y^2 = x^2 + z^2$, con $0 \leq y < 3$.

d) $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} xy \\ yz \\ xz \end{bmatrix}$, a través de la superficie $S : z = 1 - x^2$, con $0 \leq y \leq 1$ y $z > 0$.

e) Un globo aerostático tiene forma esférica truncada (ver figura). Los gases calientes escapan a través de la superficie porosa a una velocidad

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z), \text{ siendo } \mathbf{F}(x, y, z) = [\ -y \quad x \quad 0\ ]^T$$

Calcule el flujo de gases calientes a través del globo.