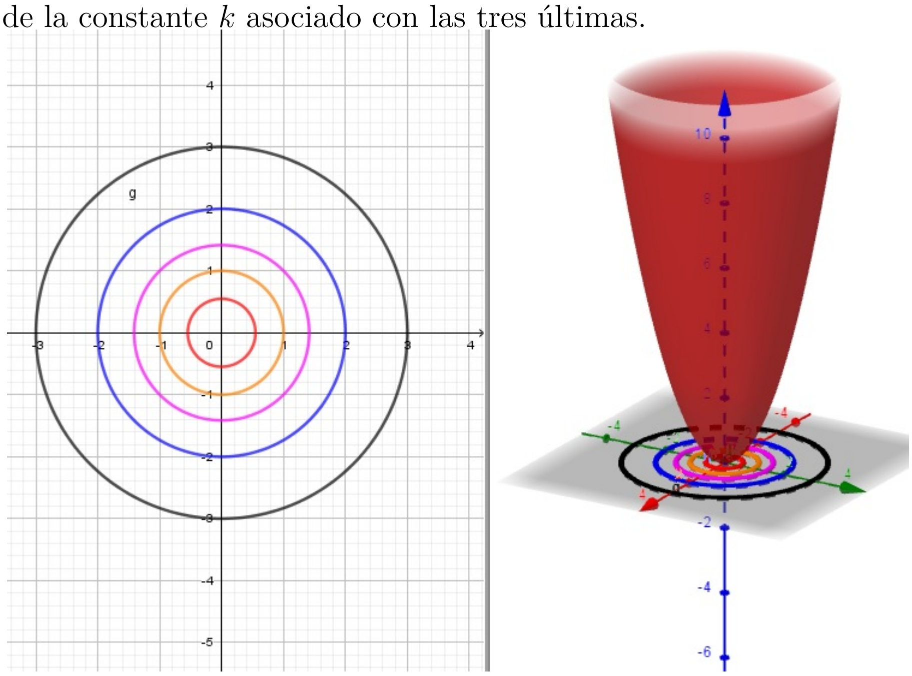
GUÍA PRÁCTICA 1: FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

1. Indique la expresión que utilizará para resolver los siguientes problemas.
   a) Se quiere pintar un rectángulo de madera de base x y altura y. ¿Cuántos litros de pintura se necesitarán para darle una mano? Suponga un rendimiento de la pintura igual a 1 $litro/m^2$.
   b) Un móvil se desplaza sobre una trayectoria rectilínea con velocidad constante v. Indique el espacio recorrido x en un tiempo t.
   c) Calcule el volumen encerrado por una caja de cartón con forma de paralelepípedo, de ancho y, profundidad x y altura z.

   Para cada caso exprese la función que resuelve el problema, la cantidad de variables independientes involucradas y la naturaleza (escalar o vectorial) del resultado obtenido.

2. Determine y grafique el campo de existencia.
   a) $z = f(x, y) = 2xy^3 + \dfrac{y}{e^x} + 7$
   b) $z = f(x, y) = \dfrac{9}{xy}$
   c) $z = f(x, y) = \sqrt{\dfrac{1}{4} - x^2 - y^2}$
   d) $z = f(x, y) = \ln\left(\dfrac{x}{y} + y\right)$
   e) $z = f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x}}{2\ln(y - x^2)}$

3. Observe el mapa de contorno correspondiente a la superficie graficada. Indique la ecuación de la superficie y de las curvas de nivel naranja, azul y negra. Determine el valor de la constante k asociado con las tres últimas.



4. Indique la expresión de las curvas de nivel de las siguientes funciones. Realice un mapa de contorno con tres curvas.
   a) $f(x,y) = x + y + 1$
   b) $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+1}$
   c) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
   d) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$, $k = -2, 0, 1$
5. Dé la definición de derivada parcial de $z = f(x,y)$ respecto a la variable y. Interprete geométricamente y realice una representación gráfica.
6. El precio P de una vivienda, en función de la superficie S y de la calidad de sus materiales C, viene dado por una función $P(S,C)$. Analice si es razonable decir que $\dfrac{\partial P}{\partial C} > 0$ y pensar que $\dfrac{\partial P}{\partial S} < 0$.
7. Se interseca la función $z = f(x,y) = \sqrt{9 - 2x^2 - y^2}$, con el plano de ecuación $y = 1$. Determine la ecuación de la recta tangente en el punto $(\sqrt{2}, 1, 2)$. ¿Cómo es la variación de la función en la dirección de x cuando y se mantiene fija?
8. Dada la función $z = 2 - x - y^2$, encuentre la recta tangente en el punto $(2, 1, -1)$, en el plano $x = 2$. Grafique e interprete.
9. Calcule las derivadas parciales de cada campo escalar.
   a) $f(x,y) = x^5 + 3x^3y^2 + 6xy^4$
   b) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$
   c) $f(r,\theta,\varphi) = r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\varphi$
   d) $f(x,t) = te^{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{x}\right)}$
   e) $f(x,y,z,w) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 + wz^2}}{w}$
10. Dada la función $f(x,y) = e^{xy} + \operatorname{sen}\left((2x + 3y)\,\pi\right)$, calcule: $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $f_x(0,1)$, $f_y(2,-1)$, $f_{xx}(0,1)$ y $f_{xy}(2,-1)$.
11. Dada la función $f(x,y) = x^2 \operatorname{sen} y + (3x + y^2)\cos x$. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Evalúe las mismas en el punto $(0,\pi)$.
12. Indique el concepto teórico que utiliza para probar que una función es diferenciable en un punto y en una región R.
13. Dados los siguientes campos escalares, indique si son diferenciables. Cuando sea posible, determine la región de diferenciabilidad.
   a) $f(x,y) = \ln(2x + y^2)$; $P_0 = (-2,2)$, $P_1 = (0,1)$, $P_2 = \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$
   b) $f(u,v) = \operatorname{sen}(u^2v) + 5e^{3v}$

   c) $f(x,y) = 2y^3 + (x-1)^2$

   d) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y}$; $P_0 = (1,1)$, $P_1 = (1,0)$

14. Dada la función $f(x,y) = yx^2e^y$, halle el incremento y el diferencial en el punto $(1,2)$. Compare los resultados obtenidos.

   a) $\Delta x = 1$ y $\Delta y = 2$

   b) $\Delta x = 0,05$ y $\Delta y = 0,2$

15. Calcule el diferencial primero y segundo de las siguientes funciones. Indique la expresión de los diferenciales para los puntos dados.

   a) $f(x,y) = y + \cos(xy)$; $P = (\pi, 1)$

   b) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$; $P = (1,2)$

   c) Indique la expresión del diferencial n-ésimo.

16. Un objeto de masa m se mueve a lo largo de un camino circular con velocidad angular constante ω. Su movimiento se encuentra descripto por el vector posición $\mathbf{r}(t) = R\cos(\omega t)\mathbf{i} + R\,\mathrm{sen}(\omega t)\mathbf{j}$. Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza $\mathbf{F}(t)$ que actúa sobre el objeto, sabiendo que $\mathbf{F}(t) = m \cdot \mathbf{a}(t)$ y $\mathbf{a}(t) = d^2\mathbf{r}(t)/dt^2$.

17. Clasifique los siguientes campos en escalares o vectoriales. Indique el tipo de variable y el campo de existencia en cada caso. Cuando sea posible, calcule las imágenes de los puntos $(1,0)$, $(1,-1,1)$, $(-1,0,0)$ y 4.

   a) $f(x,y) = 40 - 4x^2 - y^2$

   b) $\mathbf{F}(s,t) = (2st^2 - t^3)\,\mathbf{i} - 3st\mathbf{j}$

   c) $g(u,v,w) = \dfrac{u^3}{v} - w^2$

   d) $\mathbf{G}(x,y,z) = (xy, z^2x^5)$

   e) $\mathbf{H}(t) = t^{1/2}\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$

18. Defina vector gradiente.

19. Dado el campo escalar $g(x,y) = x - y^2$, se pide:

   a) Encuentre $\nabla g(3,-1)$ y determine la recta tangente a la curva de nivel $g(x,y) = 2$ en $(3,-1)$.

   b) Grafique la curva de nivel, la recta tangente y el vector gradiente. Enuncie la propiedad utilizada.

20. Dada la superficie $z = x^2 + 3y^3 - (xy + 4)$. Halle el vector normal, el plano tangente y la recta normal en el punto $(2,1,1)$. ¿Qué condición debe cumplir la función $z = f(x,y)$ para admitir plano tangente?

21. Encuentre la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie de ecuación $xy + yz + zx = 11$ en el punto $(1,2,3)$.

22. Defina y determine el vector gradiente para los siguientes campos:
    a) $f(x,y) = e^{x^2 y}$; $P = (1,1)$
    b) $w(u,v) = u \ln(v^2)$; $P_1 = (1,e)$, $P_2 = (1,1)$. Grafique.
    c) $f(x,y) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$; $P = (1,0)$
    d) $f(x,y,z) = \sqrt[3]{z} + 3xy^2$
    e) $f(x,y) = \cos(\pi x)\operatorname{sen}(\pi y) + \operatorname{sen}(2\pi y)$, $P = \left(1, \dfrac{1}{2}\right)$. Grafique.
23. Si la temperatura en cualquier punto de un cuerpo homogéneo está dada por $t(x,y,z) = e^{xy} - xy^2 - x^2yz$, ¿Cuál es la dirección de máxima caída de la temperatura en el punto $(1,-1,2)$?¿Cuál es la tasa o ritmo de disminución?
24. Determine la dirección en la cual la función $t(x,y) = ye^{\operatorname{sen}(x-y)}$ aumenta más rápidamente en el punto $(1,1)$ y halle esa razón de cambio.
25. Defina derivada direccional. Interprete geométricamente.
26. Calcule la derivada direccional de los siguientes campos:
    a) $z = \dfrac{x^2}{2} + \sqrt{y}$ en el punto $(2,1)$, en la dirección del vector $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$.
    b) $z = 2^y + \dfrac{y^3x}{3}$ en el punto $(1,2)$, en la dirección que forma un ángulo de 135^o con el eje x.
    c) $z = y^3 - 3x^2y - xy$, en el punto $P_0 = (3,1)$, en la dirección que va de $P_1 = (2,2)$ a $P_2 = (-1,6)$.
    d) $z = y - 5x^2$, en el punto $P = (1,1)$, en la dirección que forma un ángulo de $\dfrac{\pi}{6}$ radianes, con respecto al gradiente de la función.
27. Dado el campo $f(x,y) = e^{x^2y} + xy$ y los vectores $\mathbf{u} = (1,0)$ y $\mathbf{v} = (0,1)$, calcule $D_{\mathbf{u}}f(x,y)$ y $D_{\mathbf{v}}f(x,y)$. ¿Qué relación existe entre estas derivadas direccionales y las derivadas parciales de la función $f(x,y)$?
28. Dada una función diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$, se sabe que el plano tangente a $f(x,y)$ en el punto $(1,2)$ es $2x+3y+4z = 1$. ¿Se puede calcular, con estos datos, la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{v} = (2,2)$?¿Cuál es ese valor?
29. Si la ecuación de la recta normal a la superficie $z = f(x,y)$ en un punto P, está dada por $2(x-2) = \dfrac{y-3}{5} = -z+2$,
    a) Determine el valor de la función en el punto P y $\nabla f(P)$.
    b) Calcule la derivada direccional de $z = f(x,y)$ en P y según la dirección que forma 45^o con el eje x.
    c) Obtenga la ecuación del plano tangente a la superficie en P.
30. Enuncie las condiciones que debe cumplir una función compuesta, del tipo $z =$

$f[x(t), y(t)]$ para poder calcular dz/dt en algún punto de su dominio.

31. La presión P en kPa, el volumen V en litros y la temperatura T en ^oK de un mol de un gas ideal se encuentran relacionados por la expresión $PV = 8.31T$. Encuentre la velocidad a la cual la presión cambia con respecto al tiempo si la temperatura es de 300^oK y se incrementa a razón de $0.1^oK/seg$; y el volumen es de 100 litros y se incrementa a razón de $0.2l/seg$.

32. Utilizando la regla de la cadena, halle $\dfrac{df}{dt}$ para las siguientes funciones:
    a) $f(x, y) = \sqrt{x^2y}$; $x(t) = \ln t$; $y(t) = \cos t$. Calcule $f'(1)$.
    b) $f(x, y, z) = x^2y + \dfrac{y}{z}$; $x = t - 1$; $y = 2t$; $z = \ln t^2$.
    c) $f(x, y, z) = x^2ye^{1+z^2}$; $x = t^2 + t$; $y = t^2 + 1$; $z = t^5 + 5$.

33. Sea $f(x, y) = x^2 + xy^3$, donde $x = x(t) = \cos t$ e $y = y(t) = e^t$. Se pide que,
    a) Derive $F(t) = f(x(t), y(t))$, respecto de t, aplicando la regla de la cadena.
    b) Halle, explícitamente, la función compuesta $F(t)$ y derivela.
    c) Analice ambos resultados.

34. Halle $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, por la regla de la cadena,
    a) $z = \ln(x^2 - 2y^3)$, con $x = \cos v$ e $y = uv$
    b) $z = e^{yx} + yw$, con $x = u + v$, $y = -v$ y $w = u^2$

35. *a*) Enuncie el teorema de existencia y unicidad de la función implícita de una variable.
    b) Verifique las condiciones y calcule $\dfrac{dy}{dx}$ en los puntos indicados en cada caso.
        1) $F(x, y) = \operatorname{sen}(x + y) + e^{y/x} = 0$; $P_1 = \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$, $P_2 = (\pi, 0)$
        2) $F(x, y) = -xy^2 + x^2 - 2 = 0$; $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (-1, 1)$

36. *a*) ¿Qué condición debe cumplir $z = f(x, y)$ para poder ser desarrollada en Serie de Taylor?¿Por qué?
    b) Haga el desarrollo por serie de Taylor, hasta el orden n, de $z = f(x, y)$.
    c) ¿Para qué sirve este desarrollo?

37. Sea $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 9$. Encuentre una aproximación lineal de la función $z = f(x, y)$, en el entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$

38. *a*) Encuentre una aproximación lineal de la función $f(x, y) = \ln(x - y) + 1$ en $(2, 1)$.
    b) Utilice el ítem anterior para aproximar $f(2.02; 0.9)$.
    c) Calcule el valor exacto de $f(2.02; 0.9)$ y comparelo con el aproximado.

39. *a*) Halle el polinomio de segundo grado que mejor aproxima en el punto $(0, \pi)$ a

la función $f(x,y) = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y$.

b) Desarrolle la función $f(x,y) = \ln(x^2 + y)$ en potencias de x e $(y-1)$, hasta el segundo orden.

c) Encuentre el polinomio de Taylor de segundo orden para $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+2y) \cdot x^2$ en el punto $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$.

d) Halle el polinomio de segundo grado que mejor aproxime en el punto $\left(\frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ a la función $f(x,y) = e^{xy} \cdot \cos y$.

40. Dada la función $f(x,y) = ye^{xy}$ y el punto $P = (0,1)$; se pide que:

   a) Determine la aproximación lineal en P y la use para calcular $f(0.1; 1.2)$.

   b) Determine la aproximación de segundo orden en P y la use para calcular $f(0.1; 1.2)$.

   c) Compare los resultados anteriores con el valor exacto de $f(0.1; 1.2)$ e indique la conclusión a la que llega.

41. Defina extremo relativo de $z = f(x,y)$ en $P_0 = (x_0, y_0)$

   a) ¿Qué concepto analiza para saber si la función presenta extremos?

   b) Enuncie las condiciones necesaria y suficiente de extremo relativo. ¿Por qué se analiza el signo del Hessiano?

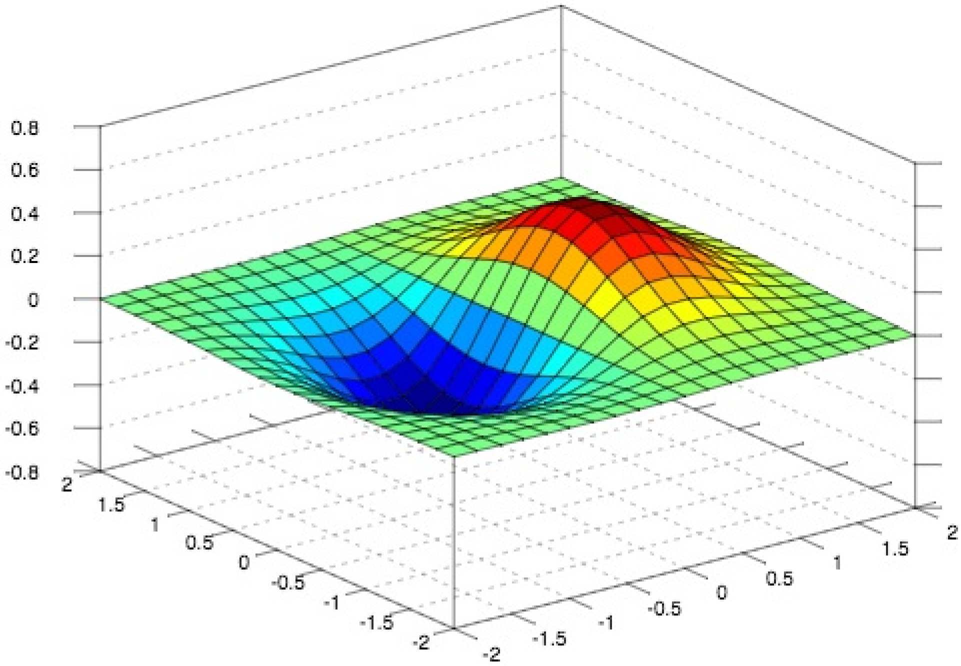
42. Las siguientes figuras corresponden a la función $z = xe^{-x^2-y^2}$. Analícelas y concluya:

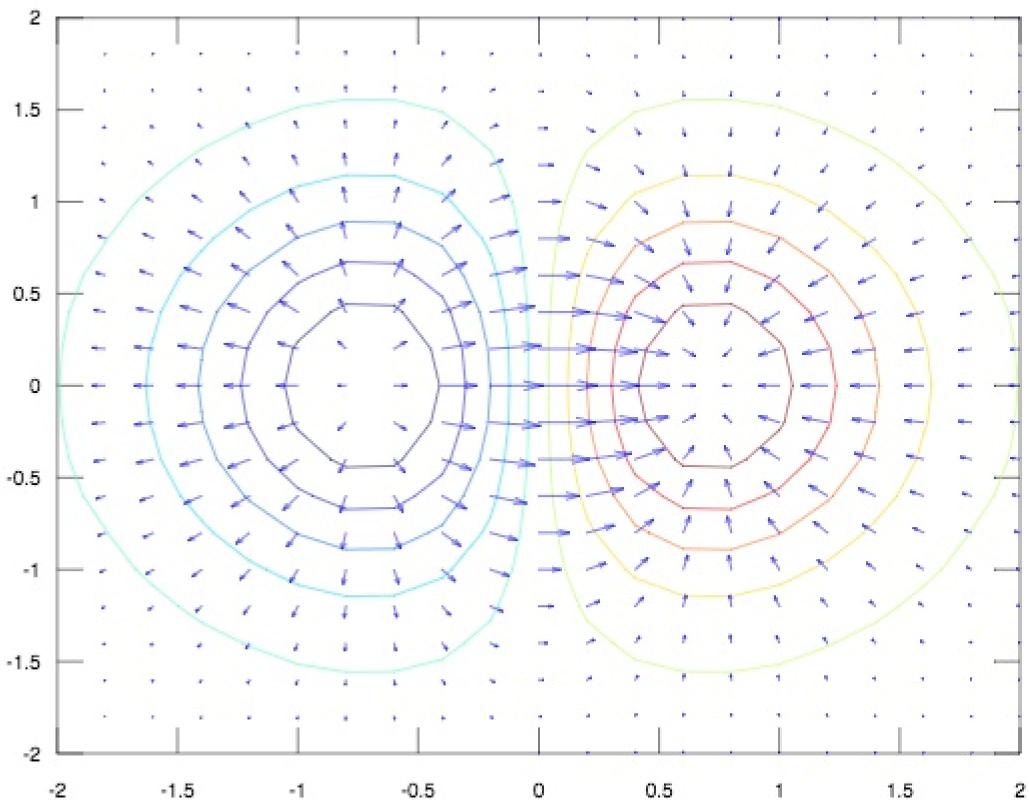
   a) ¿Qué puede observar respecto de la relación entre el vector gradiente y las curvas de nivel?

   b) Si se ubica en un punto dado de la superficie. ¿En qué dirección puede observar que aumenta más rápidamente? ¿Y en cuál disminuye más rápidamente?

   c) ¿Cuánto vale el gradiente en los puntos extremos de la función?

   d) Clasifique dichos extremos. ¿Qué puede decir respecto del plano tangente en estos puntos?





43. Calcule y clasifique los extremos de las siguientes funciones:

   a) $f(x,y) = 14x^2 - 2x^3 + 2y^2 + 4xy$

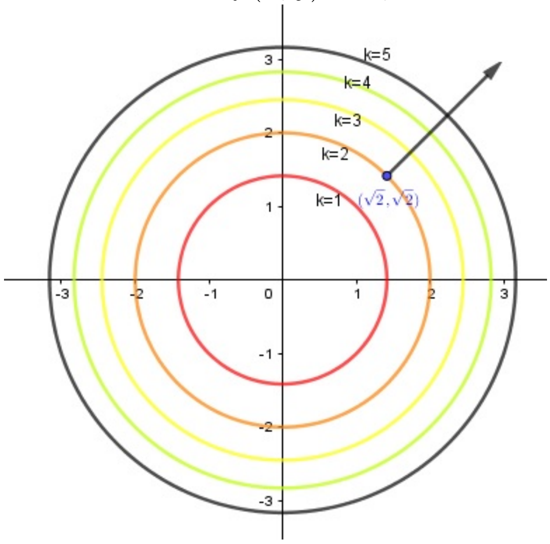
   b) $f(x,y) = x^3 + xy^2$

   c) $f(x,y) = 6xy + \dfrac{x^2}{2} + xy^2$

   d) $f(x,y) = \ln\left(x^2 + y^2 + 1\right)$

   e) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 27x - 12y$

44. Observe las siguientes curvas de nivel $f(x,y) = k$, de una función diferenciable.



Complete:

a) $f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = ...$

b) Si $\nabla f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, entonces $f_x(\sqrt{2},\sqrt{2}) = ...$ y $f_y(\sqrt{2},\sqrt{2}) = ...$

c) ¿Cuál es el valor de la derivada direccional máxima en $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ y en qué dirección se da?

d) Halle una aproximación lineal de la función en un entorno de $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ y estime el valor de $f\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.

e) La función presenta un extremo en $(0,0)$. ¿Es un máximo o un mínimo? Justifique.

f) Elija uno de los siguientes gráficos para la función $z = f(x,y)$. Justifique con dos argumentos distintos.

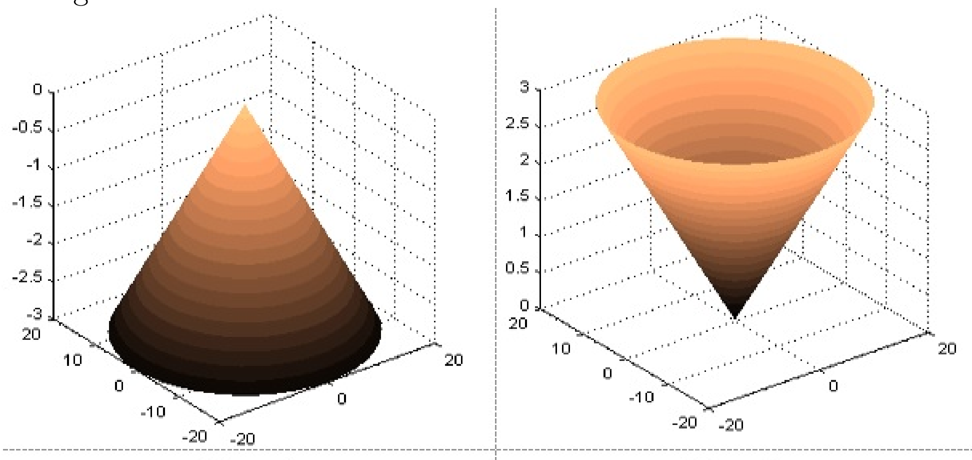


Figura 1. *Figura 2.*

45. Encuentre los extremos de la función $f(x,y) = 49 - x^2 - y^2$, sujetos a la condición $x + 3y = 10$.

46. Encuentre los extremos de la función $f(x,y) = x^2 + 4xy + y^2$, sujetos a la restricción $x - y - 6 = 0$.