Cálculo II – Análisis Matemático II – Jueves 9/6. Ejercicios: 14-m, 15-a, 15-b, aplicación de segundo orden

14. *Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales por el método de los coeficientes indeterminados e indique las soluciones general y particular según sea el caso.*

m. $y''' + y'' - 6y' = 3e^{-2x} - x \quad ; \quad y(0) = 0 \quad ; \quad y'(0) = y''(0) = 1$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} y(x) = & v(x) + & u(x) \\ SGC & SGH & SPC \end{array}}$$

Ecuación característica: $r^3 + r^2 - 6r = 0 \quad \rightarrow \quad r(r^2 + r - 6) = 0$

Raíces: $r_1 = 0 \quad ; \quad r_2 = 2 \quad ; \quad r_3 = -3 \quad \rightarrow$ Reales y distintas

Solución general de la ED homogénea:

$v(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-3x} = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-3x}$

Determinemos $u(x) \quad \rightarrow \quad Q(x) = 3e^{-2x} - x$; combinación de exponencial con polinómica

Luego, la solución particular de la ED completa, con coeficientes a determinar es:

$u(x) = Ae^{-2x} + x(Bx + D) = Ae^{-2x} + Bx^2 + Dx$

Entonces,

$u'(x) = -2Ae^{-2x} + 2Bx + D$

$u''(x) = 4Ae^{-2x} + 2B$

$u'''(x) = -8Ae^{-2x}$

Por lo tanto,

$-8Ae^{-2x} + 4Ae^{-2x} + 2B - 6(-2Ae^{-2x} + 2Bx + D) = 3e^{-2x} - x$

$$\begin{cases} -8A + 4A + 12A = 3 \quad \rightarrow \quad 8A = 3 \quad \rightarrow \quad A = \dfrac{3}{8} \\ -12B = -1 \quad \rightarrow \quad B = \dfrac{1}{12} \\ 2B - 6D = 0 \quad \rightarrow \quad 2\dfrac{1}{12} - 6D = 0 \quad \rightarrow \quad D = 1/36 \end{cases}$$

$u(x) = \frac{3}{8}e^{-2x} + \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{36}x$

La solución general de la ED completa es

$$\boxed{y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-3x} + \frac{3}{8}e^{-2x} + \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{36}x}$$

Aplicamos las condiciones iniciales para determinar una solución particular,

$$y(0) = 0 \quad \rightarrow \quad y(0) = C_1 + C_2 + C_3 + \frac{3}{8} = 0 \qquad (I)$$

$$y'(x) = 2C_2 e^{2x} - 3C_3 e^{-3x} - 2\frac{3}{8}e^{-2x} + 2\frac{1}{12}x + \frac{1}{36}$$

$$y'(x) = 2C_2 e^{2x} - 3C_3 e^{-3x} - \frac{3}{4}e^{-2x} + \frac{1}{6}x + \frac{1}{36}$$

$$y'(0) = 1 \quad \rightarrow \quad y'(0) = 2C_2 - 3C_3 - \frac{3}{4} + \frac{1}{36} = 2C_2 - 3C_3 - \frac{13}{18} = 1 \qquad (II)$$

$$y''(x) = 4C_2 e^{2x} + 9C_3 e^{-3x} + \frac{3}{2}e^{-2x} + \frac{1}{6}$$

$$y''(x) = 1 \quad \rightarrow \quad y''(x) = 4C_2 + 9C_3 + \frac{3}{2} + \frac{1}{6} = 4C_2 + 9C_3 + \frac{5}{3} = 1 \qquad (III)$$

Entonces,

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 + \frac{3}{8} = 0 \\ 2C_2 - 3C_3 - \frac{13}{18} = 1 \\ 4C_2 + 9C_3 + \frac{5}{3} = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad C_3 = -\frac{37}{135} \quad ; \quad C_2 = \frac{9}{20} \quad ; \quad C_1 = -\frac{119}{216}$$

Luego, una solución particular de la ED completa es,

$$\boxed{y(x) = -\frac{119}{216} + \frac{9}{20}e^{2x} - \frac{37}{135}e^{-3x} + \frac{3}{8}e^{-2x} + \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{36}x}$$

***15.** Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Indique las variables independiente y dependiente. Clasifique el tipo de solución obtenida.*

a. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = -4x - y \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 2x - y = 0 \\ 4x + \frac{dy}{dt} + y = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} (D-2)x - y = 0 \\ 4x + (D+1)y = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación del sistema anterior, se tiene que

$$y = (D-2)x$$

Sustituyendo en la segunda ecuación del sistema,

$$4x + (D+1)(D-2)x = 0 \quad \rightarrow \quad 4x + (D^2 - 2D + D - 2)x = 0 \quad \rightarrow$$

$4x + (D^2 - D - 2)x = 0 \quad \rightarrow \quad (D^2 - D - 2 + 4)x = 0 \quad \rightarrow \quad (D^2 - D + 2)x = 0$

Resolvemos la última EDO, para encontrar $x(t)$

Ecuación característica: $r^2 - r + 2 = 0$

Raíces: $r_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2} i \quad \rightarrow$ Complejas conjugadas

Solución general de la ED homogénea:

$$v(t) = e^{\frac{1}{2}t}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right)$$

Luego,

$$\boxed{x(t) = v(t) = e^{\frac{1}{2}t}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right)}$$

Ahora busquemos $y(t)$, reemplazando $x(t)$ en $y = (D-2)x$

$y(t) = (D-2) \cdot x(t) = x'(t) - 2x(t)$

$$x'(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right) + e^{\frac{1}{2}t}\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{7}}{2}C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right)$$

Entonces, $y(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right) + e^{\frac{1}{2}t}\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{7}}{2}C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right) - 2e^{\frac{1}{2}t}\left(C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right)$

$$y(t) = \left(\frac{1}{2}C_1 + \frac{\sqrt{7}}{2}C_2 - 2C_1\right)\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)e^{\frac{1}{2}t} + \left(\frac{1}{2}C_2 - \frac{\sqrt{7}}{2}C_1 - 2C_2\right)\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)e^{\frac{1}{2}t}$$

$$\boxed{y(t) = \left(-\frac{3}{2}C_1 + \frac{\sqrt{7}}{2}C_2\right)\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)e^{\frac{1}{2}t} + \left(-\frac{3}{2}C_2 - \frac{\sqrt{7}}{2}C_1\right)\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)e^{\frac{1}{2}t}}$$

b. $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 5y - e^t & ; \quad x(0) = 1 \\ \frac{dy}{dt} = x - y - e^t & ; \quad y(0) = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} - 3x - 5y = -e^t \\ -x + \frac{dy}{dt} + y = -e^t \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} (D-3)x - 5y = -e^t \\ -x + (D+1)y = -e^t \end{cases}$$

Aplicando Cramer, determinemos $x(t)$

$$x(t)=\frac{\begin{vmatrix}-e^t & -5\\ -e^t & D+1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}D-3 & -5\\ -1 & D+1\end{vmatrix}}=\frac{(D+1)(-e^t)-5e^t}{(D-3)(D+1)-5}=\frac{-e^t-e^t-5e^t}{D^2+D-3D-3-5}=\frac{-7e^t}{D^2-2D-8}$$

$(D^2-2D-8)\cdot x=-7e^t$

Resolvamos la EDO anterior,

Ecuación característica: $r^2-2r-8=0$

Raíces: $r_1=4$; $r_2=-2$ $\rightarrow$ Reales y distintas

Solución general de la ED homogénea:

$v(t)=C_1e^{4t}+C_2e^{-2t}$

Determinemos $u(t)$ $\rightarrow$ $Q(t)=-7e^t$; exponencial.

Luego, la solución particular de la ED completa, con coeficientes a determinar es:

$u(t)=Ae^t$

Entonces,

$u'(t)=Ae^t$

$u''(t)=Ae^t$

Por lo tanto,

$$Ae^t-2Ae^t-8Ae^t=-7e^t \quad\rightarrow\quad -9Ae^t=-7e^t \quad\rightarrow\quad -9A=-7 \quad\rightarrow\quad A=\frac{7}{9}$$

Luego,

$$\boxed{x(t)=v(t)+u(t)=C_1e^{4t}+C_2e^{-2t}+\frac{7}{9}e^t}$$

Ahora busquemos $y(t)$, reemplazando $x(t)$ en el sistema de EDOs,

$$\frac{dx}{dt}=4C_1e^{4t}-2C_2e^{-2t}+\frac{7}{9}e^t$$

Reemplazando $\frac{dx}{dt}$ y x en la primera ecuación del sistema se tiene,

$$\frac{dx}{dt}-3x-5y=-e^t$$

$$4C_1e^{4t}-2C_2e^{-2t}+\frac{7}{9}e^t-3\left(C_1e^{4t}+C_2e^{-2t}+\frac{7}{9}e^t\right)-5y+e^t=0$$

$$C_1e^{4t}-5C_2e^{-2t}-\frac{5}{9}e^t=5y \quad\rightarrow\quad y(t)=\left(C_1e^{4t}-5C_2e^{-2t}-\frac{5}{9}e^t\right):5$$

$$\boxed{y(t)=\frac{1}{5}C_1e^{4t}-C_2e^{-2t}-\frac{1}{9}e^t}$$

Hemos hallado las soluciones generales del sistema, ahora aplicaremos las condiciones iniciales para hallar una solución particular.

$$x(0) = 1 \quad \rightarrow \quad x(0) = C_1 + C_2 + \frac{7}{9} = 1$$

$$y(0) = 0 \quad \rightarrow \quad y(0) = \frac{1}{5}C_1 - C_2 - \frac{1}{9} = 1$$

Por lo tanto,

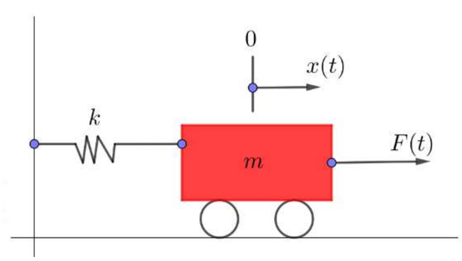
$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{7}{9} = 1 \\ \frac{1}{5}C_1 - C_2 - \frac{1}{9} = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{2}{9} \\ \frac{1}{5}C_1 - C_2 = \frac{10}{9} \end{cases} \quad \rightarrow \quad C_2 = -\frac{8}{9} \quad ; \quad C_1 = \frac{10}{9}$$

Entonces, una solución particular del sistema de EDOs es

$$\boxed{\begin{gathered} x(t) = \frac{10}{9}e^{4t} - \frac{8}{9}e^{-2t} + \frac{7}{9}e^{t} \\ y(t) = \frac{1}{5}\cdot\frac{10}{9}\, e^{4t} - \left(-\frac{8}{9}\right)e^{-2t} - \frac{1}{9}e^{t} = \frac{2}{9}\, e^{4t} + \frac{8}{9}e^{-2t} - \frac{1}{9}e^{t} \end{gathered}}$$

---

17. (Nuevo, no está en la guía práctica) *Dado el siguiente sistema, determine el desplazamiento de la masa cuando han transcurrido 5 segundos. Considere k=1000; x_0=1 (desplazamiento inicial); F_0 = 10; m = 50; wf= 2.*



Equilibrio dinámico, $mx'' + kx = F_0\cos(wf\cdot t) \quad \rightarrow \quad x'' + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(wf\cdot t)$

Solución general de la ED homogénea, $mx'' + kx = 0 \quad \rightarrow \quad x'' + \frac{k}{m}x = 0$

Ecuación característica, $r^2 + \frac{k}{m} = 0 \quad \rightarrow \quad$ Raíces, $r = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,i$

Llamando $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, se tiene

$$v(t) = C_1\cos(w_0\cdot t) + C_2\sin(w_0\cdot t)$$

Ahora determinemos la solución particular de la ED completa, para ello $w_0 \neq wf$. Por lo tanto,

$$u(t) = A\cos(wf \cdot t) + B\sin(wf \cdot t)$$

$$u'(t) = -wf \cdot A\sin(wf \cdot t) + wf \cdot B\cos(wf \cdot t)$$

$$u''(t) = -wf^2 \cdot A\cos(wf \cdot t) - wf^2 \cdot B\sin(wf \cdot t)$$

Reemplazando en la EDO completa, se tiene que

$$x'' + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(wf \cdot t) \quad \rightarrow$$

$$-wf^2 \cdot A\cos(wf \cdot t) - wf^2 \cdot B\sin(wf \cdot t) + w_0^2(A\cos(wf \cdot t) + B\sin(wf \cdot t)) = \frac{F_0}{m}\cos(wf \cdot t)$$

$$\begin{cases} -wf^2 \cdot A + w_0^2 A = \dfrac{F_0}{m} \\ -wf^2 \cdot B + w_0^2 B = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad A = \frac{F_0}{m(w_0^2 - wf^2)} \quad ; \quad B = 0$$

Entonces, la solución general de la ED completa es

$$\boxed{x(t) = C_1\cos(w_0 \cdot t) + C_2\sin(w_0 \cdot t) + \frac{F_0}{m(w_0^2 - wf^2)}\cos(wf \cdot t)}$$

Si consideramos $x(0) = x_0 \quad \rightarrow \quad x'(0) = 0$

$$x(0) = x_0 \quad \rightarrow \quad x(0) = C_1\cos(w_0 \cdot 0) + C_2\sin(w_0 \cdot 0) + \frac{F_0}{m(w_0^2 - wf^2)}\cos(wf \cdot 0) = x_0$$

$$x(0) = C_1 + \frac{F_0}{m(w_0^2 - wf^2)} = x_0 \quad \rightarrow \quad C_1 = x_0 - \frac{F_0}{m(w_0^2 - wf^2)}$$

$$x'(0) = -w_0 \cdot C_1\sin(w_0 \cdot 0) + w_0 \cdot C_2\cos(w_0 \cdot 0) - wf\frac{F_0}{m(w_0^2 - wf^2)}\sin(wf \cdot 0) = 0$$

$$x'(0) = w_0 \cdot C_2 = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0$$

Luego, una solución particular de la ED completa es

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{F_0}{m(w_0^2 - wf^2)}\right)\cos(w_0 \cdot t) + \frac{F_0}{m(w_0^2 - wf^2)}\cos(wf \cdot t)$$

Por lo tanto, el desplazamiento de la masa cuando han transcurrido 5 segundos es,

$$x(5) = \left(1 - \frac{10}{50\left(\frac{1000}{50} - 2^2\right)}\right)\cos\left(\sqrt{\frac{1000}{50}} \cdot 5\right) + \frac{10}{50\left(\frac{1000}{50} - 2^2\right)}\cos(2 \cdot 5)$$

$$x(5) \cong -0.93$$