Cálculo II – Análisis Matemático II – Viernes 27/5 – Ejercicios propuestos (EDO), 2-d, 2-f, 3-a, 3-c, 4-b, 4-d, 5-c y 5-d.

2. *Complete, indicando lo que falta (ecuación diferencial, variable/s independiente/s, variable/s dependiente/s, tipo de ecuación, grado y orden).*

d. $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3} = \frac{d^2y}{dx^2}$

Primero hacemos un trabajo algebraico, para dejar expresada la ecuación diferencial en forma correcta (sin raíces o potencias fraccionarias).

$$\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad \rightarrow \quad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 1$$

Ahora podemos decir que la anterior es una ecuación diferencial ordinaria, cuyas variables independiente y dependiente son x y y, respectivamente. Es una EDO completa, de orden 2 y grado 2.

f. $(y'''')^2 - 8x(y')^4 = sen\ x$

Ecuación diferencial ordinaria (EDO), cuyas variables independiente y dependiente son x y y, respectivamente. Esta EDO es completa, de orden 4 y grado 2.

---

3. *Compruebe que la función propuesta es solución de la ecuación diferencial dada. Clasifique las soluciones en general y particular.*

a. $y = x\sqrt{1-x^2}$; $y'y = x - 2x^3$

Función

EDO

Una función es solución de una ecuación diferencial si la satisface. Entonces,

$$y = x\sqrt{1-x^2} \quad \rightarrow \quad y' = \sqrt{1-x^2} + x\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right) \quad \rightarrow$$

$$y' = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Reemplazando en el miembro izquierdo de la EDO, se tiene

$$y'y = \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) x\sqrt{1-x^2}$$

$$y'y = x\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-x^2}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y'y = x(1-x^2) - x^3$$

$$y'y = x - x^3 - x^3$$

$y'y = x - 2x^3 \quad \rightarrow$ Por lo tanto, la función propuesta es ***una solución particular*** de la EDO dada

c. $y = \ln(C + e^x) \quad ; \quad y' = e^{x-y}$

Función EDO

Una función es solución de una ecuación diferencial si la satisface. Entonces,

$y = \ln(C + e^x) \quad \rightarrow \quad y' = \frac{e^x}{C+e^x}$ (I)

Trabajemos ahora con el miembro derecho de la EDO,

$$e^{x-y} = e^{x-\ln(C+e^x)} = e^x e^{-\ln(C+e^x)} = e^x\left(e^{\ln(C+e^x)}\right)^{-1} = e^x(C+e^x)^{-1}$$

$e^{x-y} = \frac{e^x}{C+e^x}$ (II)

De (I) y (II), se tiene que $y' = e^{x-y}$. Por lo tanto la función propuesta es ***la solución general*** de la EDO dada.

---

4. *Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables. Cuando sea posible, encuentre la solución particular.*

b. $\frac{dy}{dx} = \frac{-3x-3xy^2}{yx^2+2y}$

Primero separamos las variables,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x - 3xy^2}{yx^2 + 2y} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-3x(1 + y^2)}{y(x^2 + 2)} \quad \rightarrow \quad \frac{y}{1 + y^2} dy = \frac{-3x}{x^2 + 2} dx$$

Una vez separadas las variables, integramos ambos miembros,

$$\int \frac{y}{1 + y^2} dy = \int \frac{-3x}{x^2 + 2} dx \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) = -\frac{3}{2}\ln(x^2 + 2) + C \quad \rightarrow$$

$$\ln(1 + y^2) = -3\ln(x^2 + 2) + C \quad \rightarrow \quad 1 + y^2 = e^{-3\ln(x^2+2)+C} = e^{-3\ln(x^2+2)}e^C \quad \rightarrow$$

$$1 + y^2 = Ce^{\ln\left[(x^2+2)^{-3}\right]} \quad \rightarrow \quad 1 + y^2 = C(x^2 + 2)^{-3} \quad \rightarrow$$

$$1 + y^2 = \frac{C}{(x^2 + 2)^3} \quad \rightarrow \quad y = \pm\sqrt{\frac{C}{(x^2 + 2)^3} - 1}$$

Por lo tanto, $y = \pm\sqrt{\frac{C}{(x^2+2)^3} - 1}$ es la solución general de la EDO dada.

d. $dx + e^{3x}dy = 0 \quad ; \quad y(0) = \frac{4}{3}$

Primero separamos las variables,

$$dx + e^{3x}dy = 0 \quad \rightarrow \quad dx = -e^{3x}dy \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{e^{3x}} = -dy$$

Una vez separadas las variables, integramos ambos miembros,

$$\int \frac{dx}{e^{3x}} = \int -dy \quad \rightarrow \quad \int e^{-3x}dx = -\int dy \quad \rightarrow \quad \frac{e^{-3x}}{-3} + C = -y \quad \rightarrow$$

$$y = \frac{e^{-3x}}{3} + C$$

Por lo tanto, $y = \frac{e^{-3x}}{3} + C$ es la solución general de la EDO dada.

Aplicamos la condición inicial, $y(0) = \frac{4}{3}$, para calcular una solución particular.

$$y(0) = \frac{4}{3} \quad \rightarrow \quad \frac{4}{3} = \frac{e^{-3\cdot 0}}{3} + C \quad \rightarrow \quad \frac{4}{3} = \frac{1}{3} + C \quad \rightarrow \quad C = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Entonces, una solución particular de la EDO dada es $y = \frac{e^{-3x}}{3} + 1$.

----

5. *Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales. Identifique solución general y solución particular, según corresponda.*

c. $y' = x(x^2 + 9)^{1/2} \quad ; \quad y(-4) = 0$

La solución general de una ecuación diferencial lineal, $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, está dada por $y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x)\, dx + C\right]$.

Luego, $y' = x(x^2 + 9)^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = x(x^2 + 9)^{\frac{1}{2}} \quad \rightarrow \quad P(x) = 0$ y

$Q(x) = x(x^2 + 9)^{1/2}$

Entonces,

$$\int P(x)dx = \int 0dx = 0$$

$$\int e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x)\, dx = \int e^0 \cdot x(x^2 + 9)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \int x(x^2 + 9)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(x^2 + 9)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2} + 1}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{3}(x^2 + 9)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{(x^2 + 9)^{\frac{3}{2}}}{3}$$

Por lo tanto,

$y(x) = e^{-0}\left[\frac{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}{3} + C\right] = \frac{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$ es la solución general de la EDO lineal

Aplicando la condición inicial, $y(-4) = 0$, se tiene

$$y(x) = \frac{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}{3} + C \quad \rightarrow \quad 0 = \frac{((-4)^2+9)^{\frac{3}{2}}}{3} + C \quad \rightarrow \quad C = -\frac{125}{3}$$

Entonces, una solución particular de la EDO lineal es

$$y(x) = \frac{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{125}{3}$$

d. $xy' - 2y = x^3 e^x$

Dada la EDO, primero se divide a ambos miembros por x (considerando $x \neq 0$)

$\frac{xy'}{x} - \frac{2y}{x} = \frac{x^3 e^x}{x} \quad \rightarrow \quad y' - \frac{2}{x}y = x^2 e^x \quad \rightarrow$ EDO lineal

Se tiene que, $P(x) = -\frac{2}{x}$ y $Q(x) = x^2 e^x$

La solución general de una ecuación diferencial lineal, $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, está dada por $y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x)\, dx + C\right]$.

Luego,

$\int P(x)dx = \int -\frac{2}{x} dx = -2\ln x$

$$\int e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x)\, dx = \int e^{-2\ln x} \cdot x^2 \cdot e^x\, dx = \int x^{-2} \cdot x^2 \cdot e^x\, dx = \int e^x\, dx = e^x$$

$$y(x) = e^{2\ln x}(e^x + C) = e^{\ln x^2}(e^x + C) = x^2(e^x + C) = x^2 e^x + Cx^2$$

Por lo tanto, $y(x) = x^2 e^x + Cx^2$ es la solución general de la EDO lineal dada.