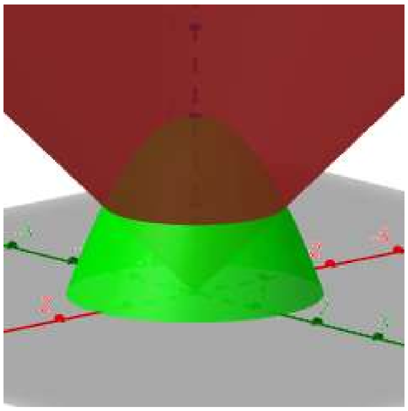
Cálculo II – Análisis Matemático II – Martes 17/5 – Ejercicios 11-c y 13-d.

11. *Calcule el flujo de los campos siguientes, a través de las superficies indicadas.*

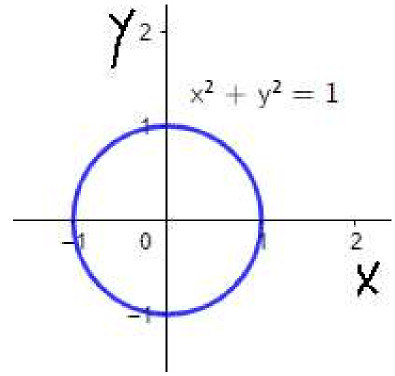
> ***c.*** $\boldsymbol{F}(x,y,z) = [y \quad 0 \quad z^2]^T$, *siendo* S *el sólido limitado por* $z^2 = x^2 + y^2$ *;* $z = 2 - x^2 - y^2$ *y* $z > 0$ *.*

Tenemos que $z^2 = x^2 + y^2$ y $x^2 + y^2 = 2 - z$, entonces $z^2 = 2 - z$.

Luego, $z^2 + z - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad z_1 = 1 \;\; ; \;\; z_2 = -2$. Por lo tanto, la intersección entre el cono y el paraboloide se da en el plano $z = 1$ (ya que $z > 0$).



Proyección en xy
(z = 1)



Flujo del campo $\boldsymbol{F}$, $\Phi = \iint_S \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{n}\, dS$.

Como S es una superficie cerrada y se verifican las otras hipótesis del teorema de Gauss, entonces se hará uso del mismo para calcular el flujo del campo vectorial dado.

$$\Phi = \iint_S \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iiint_R div(\boldsymbol{F})\, dx\, dy\, dz$$

Hacemos cambio de coordenadas cartesianas a cilíndricas,

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ \quad z = z \end{cases} \qquad \rightarrow \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \quad ; \quad 0 \le \rho \le 1 \quad ; \quad \rho \le z \le 2 - \rho^2$$

Jacobiano: $J = \rho$

Además, la divergencia del campo es $div(\boldsymbol{F}) = P_x + Q_y + R_z = 0 + 0 + 2z = 2z$.

$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_\rho^{2-\rho^2} 2z\rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$

$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 z^2\rho\Big|_\rho^{2-\rho^2} d\rho\, d\theta$$

$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 ((2-\rho^2)^2\rho - \rho^3)\, d\rho\, d\theta$$

$$\Phi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (4\rho - 4\rho^3 + \rho^5 - \rho^3)\, d\rho\, d\theta$$

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4\rho - 5\rho^3 + \rho^5)\, d\rho\, d\theta$$

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \left(2\rho^2 - \frac{5}{4}\rho^4 + \frac{\rho^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 d\theta$$

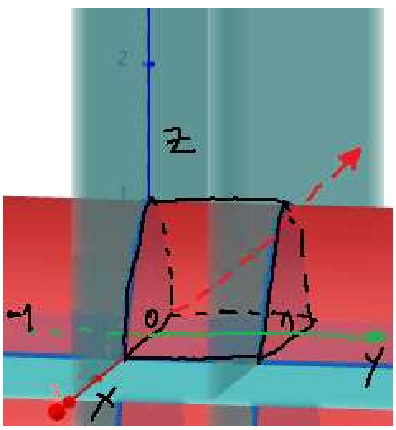
$$\Phi = \frac{11}{12}\theta\Bigg|_0^{2\pi}$$

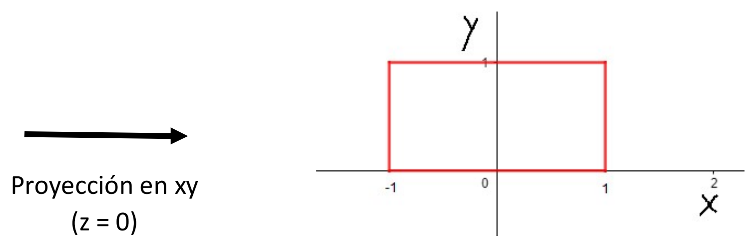
$$\Phi = \frac{11}{6}\pi$$

---

13. *Aplique el teorema de Stokes en forma conveniente.*

d. $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} xy \\ yz \\ xz \end{bmatrix}$, *a través de la superficie* $S: z = 1 - x^2$, *con* $0 \leq y \leq 1$ *y* $z > 0$.

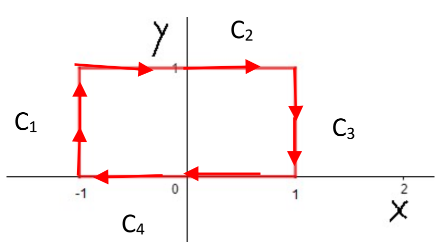




$z = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = 1 - x^2 \quad \rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \rightarrow \quad x = \pm 1$

Como la superficie está abierta en la base y se cumplen las otras hipótesis del teorema de Stokes, hacemos uso del mismo para calcular el flujo del rotor del campo vectorial dado.

$$\Phi_{rot} = \iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F})^T \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \oint_C \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{dr}$$



Parametrizamos las cuatro curvas anteriores,

$$\boldsymbol{r_1}(t) = \begin{bmatrix} -1 + t(-1+1) \\ 0 + t(1-0) \\ 0 + t(0-0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} \;\; ; \;\; 0 \leq t \leq 1 \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{r_1'}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r_2}(t) = \begin{bmatrix} -1+t(1+1) \\ 1+t(1-1) \\ 0+t(0-0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};\ \ 0 \le t \le 1 \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{r_2'}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r_3}(t) = \begin{bmatrix} 1+t(1-1) \\ 1+t(0-1) \\ 0+t(0-0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-t \\ 0 \end{bmatrix};\ \ 0 \le t \le 1 \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{r_3'}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r_4}(t) = \begin{bmatrix} 1+t(-1-1) \\ 0+t(0-0) \\ 0+t(0-0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};\ \ 0 \le t \le 1 \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{r_4'}(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces,

$$\int_{C_1} \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{dr_1} = \int_0^1 [-t \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt = 0$$

$$\int_{C_2} \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{dr_2} = \int_0^1 [-1+2t \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 (-2+4t)\, dt$$

$$= (-2t+2t^2)|_0^1$$

$$= 0$$

$$\int_{C_3} \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{dr_3} = \int_0^1 [1-t \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} dt = 0$$

$$\int_{C_4} \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{dr_4} = \int_0^1 [0 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dt = 0$$

$$\Phi_{rot} = \oint_C \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{dr} = \int_{C_1} \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{dr_1} + \int_{C_2} \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{dr_2} + \int_{C_3} \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{dr_3} + \int_{C_4} \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{dr_4} = 0$$