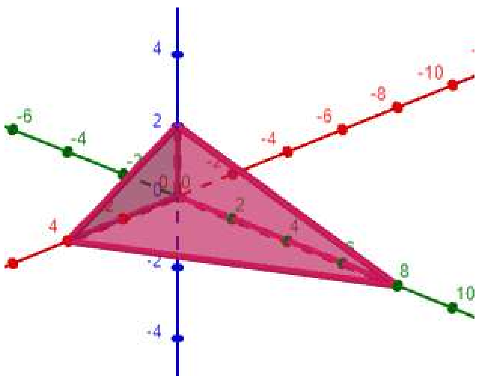
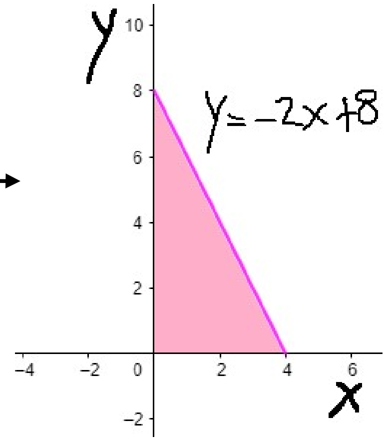
Cálculo II – Análisis Matemático II – Viernes 13/5 – Ejercicios 3-a, 3-d, 4-c, 4-d y 9.

***3.** Calcule el área lateral de las superficies dadas a continuación.*

> ***a.*** $S: 2x + y + 4z - 8 = 0$, *en el primer octante. (Solución para superficie en forma explícita)*



Proyección en xy (z=0)



Área lateral : $A_L(S) = \iint_S \; dS$

Si $z = f(x,y)$, entonces $dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$

La superficie se puede escribir como, $S: z = -\frac{1}{2}x - \frac{y}{4} + 2 = f(x,y)$

Los límites de integración son: $\quad 0 \leq x \leq 4 \quad ; \quad 0 \leq y \leq -2x + 8$

$$A_L(S) = \int_0^4 \int_0^{-2x+8} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2}\, dydx$$

$$= \int_0^4 \int_0^{-2x+8} \sqrt{\frac{21}{16}}\, dydx$$

$$= \sqrt{\frac{21}{16}} \int_0^4 y|_0^{-2x+8} dx$$

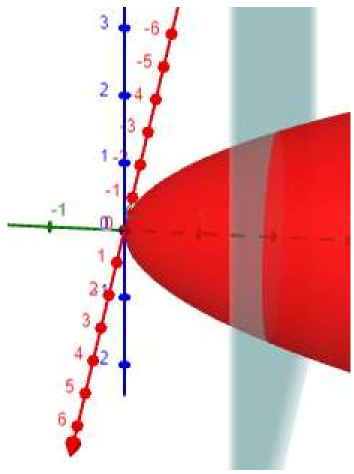
$$= \sqrt{\frac{21}{16}} \int_0^4 (-2x + 8) dx$$

$$= \sqrt{\frac{21}{16}} (-x^2 + 8x)|_0^4$$

$$A_L(S) = \sqrt{\frac{21}{16}}(-16+32) = 18.33$$

----

3. d. *$S: y = x^2 + z^2$, con $0 \leq y < 2$ (Solución para superficie en forma paramétrica)*



Parametrización de S:

$$\boldsymbol{r}(u,v) = \begin{bmatrix} v\cos u \\ v^2 \\ v\sin u \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad 0 \leq u \leq 2\pi \quad ; \quad 0 \leq v \leq \sqrt{2}$$

Área lateral de S: $A_L(S) = \iint_S dS = \iint_T \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| dudv$

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -v\sin u & 0 & v\cos u \\ \cos u & 2v & \sin u \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -2v^2\cos u \\ v\sin^2 u + v\cos^2 u \\ -2v^2\sin u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2v^2\cos u \\ v \\ -2v^2\sin u \end{bmatrix}$$

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| = \sqrt{4v^4\cos^2 u + v^2 + 4v^4\sin^2 u}$$

$$= \sqrt{4v^4 + v^2}$$

$$= \sqrt{v^2(4v^2+1)}$$

$$= v\sqrt{4v^2+1}$$

$$A_L(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} v\sqrt{4v^2+1}\ dvdu$$

$$A_L(S) = \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \frac{2}{3}(4v^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}\, du$$

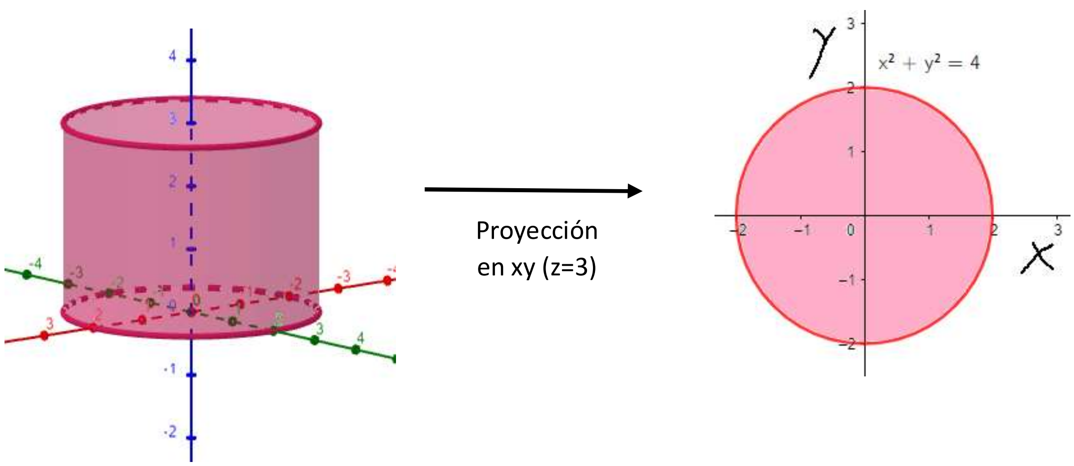
$$= \frac{1}{12}\int_0^{2\pi}\left[(8+1)^{\frac{3}{2}} - 1\right] du$$

$$= \frac{26}{12} u\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{13}{3}\pi$$

***4.** Calcule el flujo a través de las superficies indicadas, de los siguientes campos vectoriales.*

c. $\boldsymbol{V}(x,y,z) = [0 \quad 0 \quad 3z^2]^T$, *con* $S: x^2+y^2=4 \quad ; \quad 0 < z \leq 3$ *(Solución con el dS en forma geométrica)*



El flujo total del cilindro es la suma del flujo de la tapa, más el flujo lateral. Esto es, $\Phi_{total} = \Phi_{tapa} + \Phi_{lateral}$

$$\Phi_{tapa} = \iint_S \boldsymbol{V}^T \cdot \boldsymbol{n}\, dS \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{n} = \boldsymbol{k} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{z}) = 1 \quad \rightarrow$$

$$dS = \frac{1}{\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{z})} dxdy = dxdy$$

Cambio a coordenadas cilíndricas: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$; Jacobiano: $J = \rho$

$$\Phi_{tapa} = \int_0^{2\pi}\int_0^2 3z^2\rho\, d\rho\, d\theta$$

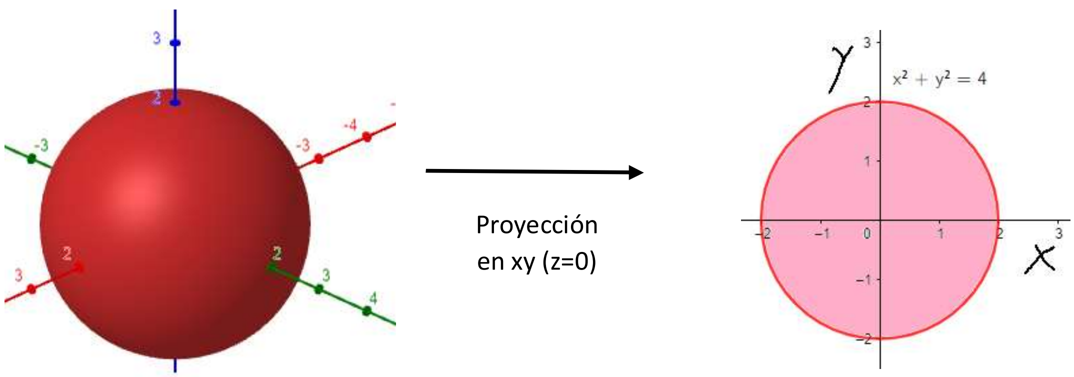
Como $z = 3$, luego

$$\Phi_{tapa} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} 27\rho \, d\rho \, d\theta = 108\pi$$

$\Phi_{lateral} = \iint_S \boldsymbol{V}^T \cdot \boldsymbol{n} \, dS = 0$, pues $\boldsymbol{V}^T \cdot \boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3z^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2x}{\sqrt{4x^2+4y^2}} \\ \frac{2y}{\sqrt{4x^2+4y^2}} \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

Por lo tanto, $\Phi_{total} = \Phi_{tapa} + \Phi_{lateral} = 108\pi$.

4.d. *$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$, siendo S la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (Solución con el dS en forma geométrica)*



Flujo: $\Phi = \iint_S \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{n} \, dS$

$$\boldsymbol{n} = \frac{\nabla \boldsymbol{S}}{\|\nabla \boldsymbol{S}\|} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{4(x^2+y^2+z^2)}} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{4}} = \begin{bmatrix} \frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} \\ \frac{z}{2} \end{bmatrix}$$

$$dS = \frac{1}{\cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{z})} \, dx \, dy = \frac{1}{\frac{z}{2}} \, dx \, dy = \frac{2}{z} \, dx \, dy$$

$$\boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{n} \, dS = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{x}{2} \\ \frac{y}{2} \\ \frac{z}{2} \end{bmatrix} \cdot \frac{2}{z} \, dx \, dy = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}\right) \cdot \frac{2}{z} \, dx \, dy$$

$$\boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{n} \, dS = \frac{x^2+y^2+z^2}{z} \, dx \, dy$$

Como la proyección de la superficie es un círculo, luego hacemos cambio de coordenadas cartesianas a polares,

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \quad \to \quad 0 \le \theta \le 2\pi \quad ; \quad 0 \le \rho \le 2$$

Jacobiano: $J = \rho$

Entonces,

$$\boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \frac{\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta + \left(\sqrt{4-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta}\right)^2}{\sqrt{4-\rho^2\cos^2\theta-\rho^2\sin^2\theta}}\ \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$\boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \frac{4}{\sqrt{4-\rho^2}}\ \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{total}} &= 2\int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{4\rho}{\sqrt{4-\rho^2}}\, d\rho\, d\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi}\int_0^2 4\rho(4-\rho^2)^{-1/2}\, d\rho\, d\theta \\ &= \frac{8}{-2}\int_0^{2\pi} \left.\frac{(4-\rho^2)^{1/2}}{1/2}\right|_0^2 d\theta \\ &= -4\cdot 2\int_0^{2\pi} -2\, d\theta \\ &= 16\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 32\pi \end{aligned}$$

---

9. *Calcule la divergencia y el rotor del campo* $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2y-z \\ -2x+z \\ xy^2 \end{bmatrix}$*. Diga si el campo es incompresible o irrotacional. Justifique.*

Tenemos que $P(x,y,z) = 2y - z$; $Q(x,y,z) = -2x + z$; $R(x,y,z) = xy^2$

Divergencia, $div\ \boldsymbol{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$

Rotor, $\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy - 1 \\ -1 - y^2 \\ -2 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy - 1 \\ -1 - y^2 \\ -4 \end{bmatrix}$

Además, como $div\ \boldsymbol{F} = 0$, luego $\boldsymbol{F}$ es incompresible.