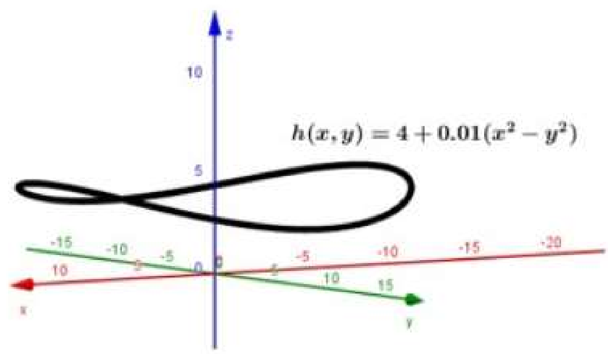
Cálculo II – Análisis Matemático II – Viernes 6/5 – Ejercicios 6-c ; 3-b ; 9 ; 10 ; 12 ; 15-c

6. *Calcule las integrales de línea conrespecto a la longitud de arco dadas a continuación*

> ***c.*** *La base de un vallado circular de 10 m de radio puede describirse en forma paramétrica como* $\boldsymbol{r}(t) = [10\cos t \quad 10\sin t]^T$*. La altura del vallado en un punto genérico* (x, y) *está dada por la función* $h(x, y) = 4 + 0.01(x^2 - y^2)$ *(Ver gráfica)*



Suponga que un litro de pintura alcanza para pintar 10 m² de vallado. ¿Cuántos litros de pintura harán falta para pintar ambos lados del vallado?

Solución.

$\boldsymbol{r}(t) = [10\cos t \quad 10\sin t]^T \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{r}'(t) = [-10\sin t \quad 10\cos t]^T, \ \ 0 \le t \le 2\pi$

Además, altura: $h(x, y) = 4 + 0.01(x^2 - y^2)$.

Entonces, $h\big(\boldsymbol{r}(t)\big) = 4 + 0.01((10\cos t)^2 - (10\sin t)^2)$

$$h\big(\boldsymbol{r}(t)\big) = 4 + 0.01(100\cos^2 t - 100\sin^2 t)$$

$$h\big(\boldsymbol{r}(t)\big) = 4 + (\cos^2 t - \sin^2 t)$$

Calculemos ahora la superficie del vallado,

$$\int_C h\big(\boldsymbol{r}(t)\big)ds = \int_C h\big(\boldsymbol{r}(t)\big) \cdot |\boldsymbol{r}'(t)|dt$$

$$\int_C h(\boldsymbol{r}(t))ds = \int_0^{2\pi} [4 + (\cos^2 t - \sin^2 t)] \cdot \sqrt{(-10\sin t)^2 + (10\cos t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} [4 + (\cos^2 t - \sin^2 t)] \cdot \sqrt{100\sin^2 t + 100\cos^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} [4 + (\cos^2 t - \sin^2 t)] \cdot \sqrt{100}\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} [4 + (\cos^2 t - \sin^2 t)] \cdot 10dt$$

$$= 10\int_0^{2\pi} [4 + (\cos^2 t - \sin^2 t)]dt$$

$$= 10\int_0^{2\pi} [4 + (1 - \sin^2 t - \sin^2 t)]dt$$

$$= 10\int_0^{2\pi} [4 + (1 - 2\sin^2 t)]dt$$

$$= 10\int_0^{2\pi} (5 - 2\sin^2 t)dt$$

$$= 10\int_0^{2\pi} \left(5 - 2\frac{1 - \cos(2t)}{2}\right) dt$$

$$= 10\int_0^{2\pi} \big(5 - (1 - \cos(2t))\big)dt$$

$$= 10\int_0^{2\pi} (4 + \cos(2t))dt$$

$$= 10\left(4t + \frac{\sin(2t)}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= 10\left(8\pi + \frac{\sin(4\pi)}{2}\right)$$

$$\int_C h(\boldsymbol{r}(t))ds = 80\pi$$

Por lo tanto, todo el vallado tiene una superficie de 80π m^2.

Por otro lado,

10 m^2 _______ 1 litro de pintura

80π m^2 _______ 8π litros de pintura

Para pintar ambos lados del vallado hacen falta $16\pi \cong 50.26$ litros de pintura.

***3.** Calcule las integrales de línea de los siguientes campos:*

> ***b.** $\boldsymbol{F}(x,y,z) = [x \quad yz \quad zx - xy]^T$ a lo largo del segmento de recta de extremos $(0,0,0)$ y $(1,2,2)$.*

Solución.

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dr} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))^T \cdot \boldsymbol{r}'(t)dt$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix} 0 + t(1-0) \\ 0 + t(2-0) \\ 0 + t(2-0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2t \\ 2t \end{bmatrix}, \qquad 0 \le t \le 1 \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{r}'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))^T \cdot \boldsymbol{r}'(t) = [t \quad 4t^2 \quad 2t^2 - 2t^2] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = t + 8t^2$$

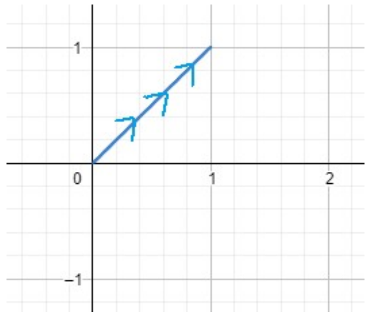
$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dr} = \int_0^1 (t + 8t^2)dt = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{8}{3}t^3\right)\Bigg|_0^1 = \frac{19}{6}$$

***9.** Dado el campo $\boldsymbol{F}(x,y) = [x \quad y+2]^T$,*

> ***a.** Calcule la integral del campo $\boldsymbol{F}$, a lo largo de:*
>
> > ***1.** $C: y = x$ desde (0,0) hasta (1,1).*
> >
> > ***2.** $C: x = y^3$ desde (0,0) hasta (1,1).*
> >
> > ***3.** $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$ desde (0,0) hasta (1,1).*
>
> ***b.** ¿Existirá otra trayectoria a lo largo de la cual la integral anterior valga igual?*

Solución.

a. 1.



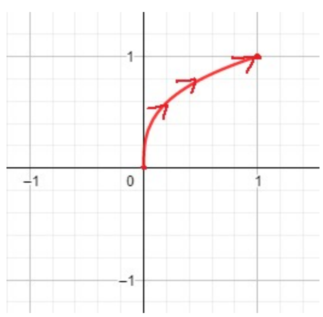
$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{dr} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big)^T \cdot \boldsymbol{r}'(t)dt$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} \;, \qquad 0 \le t \le 1 \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{r}'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big)^T \cdot \boldsymbol{r}'(t) = [t \quad t+2] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = t + t + 2 = 2t + 2$$

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{dr} = \int_0^1 (2t+2)dt = (t^2 + 2t)|_0^1 = 3$$

a. 2.



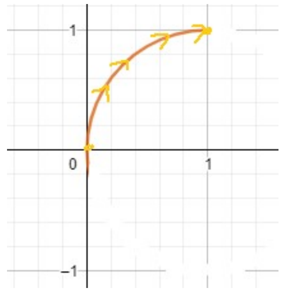
$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{dr} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big)^T \cdot \boldsymbol{r}'(t)dt$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix} t^3 \\ t \end{bmatrix} \;, \qquad 0 \le t \le 1 \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{r}'(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big)^T \cdot \boldsymbol{r}'(t) = [t^3 \quad t+2] \cdot \begin{bmatrix} 3t^2 \\ 1 \end{bmatrix} = 3t^5 + t + 2 = 3t^5 + t + 2$$

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot \boldsymbol{dr} = \int_0^1 (3t^5 + t + 2)dt = \left(\frac{t^6}{2} + \frac{t^2}{2} + 2t\right)\Bigg|_0^1 = 3$$

a. 3.



$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))^T \cdot \boldsymbol{r}'(t)dt$$

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix}\cos t + 1\\ sen\ t\end{bmatrix}, \qquad \pi \le t \le \frac{\pi}{2} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{r}'(t) = \begin{bmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))^T \cdot \boldsymbol{r}'(t) = [\cos t + 1 \quad sen\ t + 2]\cdot\begin{bmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}$$

$$= (\cos t + 1)(-\sin t) + (\sin t + 2)\cos t$$

$$= -\sin t + 2\cos t$$

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (-\sin t + 2\cos t)dt = (\cos t + 2\sin t)|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} = 3$$

b. Sí, cualquiera que se considere desde (0,0) hasta (1,1).

---

10. *Aplicando teoremas, calcule* $\int_{(0,0)}^{(1,1)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$, *con* $\boldsymbol{F}(x,y) = [x \quad y+2]^T$. *Compare los resultados obtenidos en el punto anterior. ¿Qué concluye?*

$$\left.\begin{array}{lll} P(x,y) = x & \rightarrow & \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ Q(x,y) = y+2 & \rightarrow & \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \quad P_y = Q_x \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F} \text{ es conservativo}$$

Como $\boldsymbol{F}$ es conservativo, entonces admite función potencial,

$$\phi = \int_a^x P(x,b)dx + \int_b^y Q(x,y)dy$$

$$\phi = \int_a^x x dx + \int_b^y (y+2)dy$$

$$\phi = \left.\frac{x^2}{2}\right|_a^x + \left.\left(\frac{y^2}{2} + 2y\right)\right|_b^y$$

$$\phi = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} + \left(\frac{y^2}{2} + 2y\right) - \left(\frac{b^2}{2} + 2b\right)$$

$$\phi = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 2y + C$$

Luego, por el segundo teorema fundamental del cálculo integral,

$\int_{(0,0)}^{(1,1)} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{dr} = \phi(1,1) - \phi(0,0) = \frac{1^2}{2} + \frac{1^2}{2} + 2 + C - \left(\frac{0^2}{2} + \frac{0^2}{2} + 2 \cdot 0 + C\right) = 3.$

---

12. *Dado el campo* $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} e^x \cos y + yz \\ xz - e^x \sin y \\ xy \end{bmatrix}$*, determine si es conservativo. Halle la función potencial, en caso de existir.*

Solución.

Tenemos que $P(x, y, z) = e^x \cos y + yz$; $Q(x, y, z) = xz - e^x \sin y$; $R(x, y, z) = xy.$

$\boldsymbol{F}$ es conservativo si y sólo si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$; $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$; $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= -e^x \sin y + z \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= z - e^x \sin y \end{aligned}\right\} \quad P_y = Q_x$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial z} &= y \\ \frac{\partial R}{\partial x} &= y \end{aligned}\right\} \quad P_z = R_x$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial y} &= x \\ \frac{\partial Q}{\partial z} &= x \end{aligned}\right\} \quad R_y = Q_z$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{F}$ es conservativo.

Hallemos su función potencial,

$$\phi = \int_a^x P(x, b, c)dx + \int_b^y Q(x, y, c)dy + \int_c^z R(x, y, z)dz$$

$$\phi = \int_a^x (e^x \cos b + bc)dx + \int_b^y (xc - e^x \sin y)dy + \int_c^z xydz$$

$$\phi = (e^x \cos b + bcx)|_a^x + (xcy + e^x \cos y)|_b^y + xyz|_c^z$$

$\phi = e^x \cos b + bcx - (e^a \cos b + bca) + xcy + e^x \cos y - (xcb + e^x \cos b) + xyz - xyc$

$\phi = \cancel{e^x \cos b} + \cancel{bcx} - e^a \cos b - bca + \cancel{xcy} + e^x \cos y - \cancel{xcb} - \cancel{e^x \cos b} + xyz - \cancel{xyc}$

$\phi = e^x \cos y + xyz + C$

---

15. *Calcule las integrales curvilíneas aplicando el teorema de Green.*

c. $\oint_C (x^3 + 2y)dx + (4x - 3y^2)dy$ y $C: \frac{x^2}{\boldsymbol{a^2}} + \frac{y^2}{\boldsymbol{b^2}} = 1$

Como la curva C es una elipse que encierra una región R, entonces se verifican las hipótesis del teorema de Green. Por lo tanto,

$$\oint_C \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{dr} = \oint_C (x^3 + 2y)dx + (4x - 3y^2)dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Por tratarse de una elipse, hacemos cambio de coordenadas cartesianas a coordendas polares generalizadas,

$$\begin{cases} x = a\rho \cos\theta \\ y = b\rho \sin\theta \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \rho \le 1 \end{matrix}$$

Jacobiano: $J = ab\rho$

Además, $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = (4-2)ab\rho d\rho d\theta = 2ab\rho d\rho d\theta$

Luego,

$$\oint_C \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{dr} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 2ab\rho d\rho d\theta$$

$$= 2ab \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho d\rho d\theta$$

$$= 2ab \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^1 d\theta$$

$$= 2ab \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta$$

$$= 2ab\frac{1}{2}\theta\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 2ab\pi$$