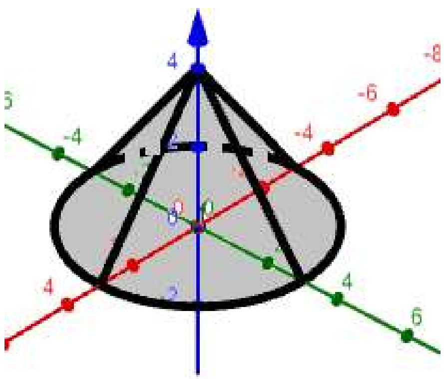
Cálculo II – Análisis Matemático II – Clase viernes 29 / 4 – Ejercicios propuestos: 19-h, 20, 24 y 25

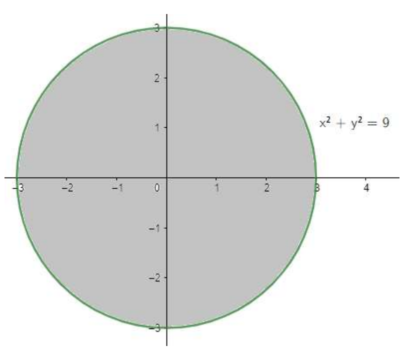
19. *Calcule el volumen de los sólidos definidos a continuación.*

h. $\begin{cases} (z-4)^2 = \frac{16}{9}(x^2+y^2) \\ \\ z = 0 \end{cases}$



Proyección sobre el plano xy (z = 0)

$$z = 0 \quad \rightarrow \quad (0-4)^2 = \frac{16}{9}(x^2+y^2) \quad \rightarrow \quad 9 = x^2+y^2$$



Cambio a
coordenadas
cilíndricas

Coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

$$0 \le \rho \le 3$$

$$0 \le z \le \cdots$$

Jacobiano: $J = \rho$

Veamos el límite superior de variación de z, en coordenadas cilíndricas.

$$(z-4)^2 = \frac{16}{9}(x^2+y^2) \quad \rightarrow \quad (z-4)^2 = \frac{16}{9}\rho^2 \quad \rightarrow \quad z-4 = -\sqrt{\frac{16}{9}\rho^2}$$

$$\rightarrow \quad z-4 = -\frac{4}{3}\rho \quad \rightarrow \quad z = -\frac{4}{3}\rho + 4 \quad \rightarrow \quad 0 \le z \le -\frac{4}{3}\rho + 4$$

Entonces, el volumen del sólido es:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{-\frac{4}{3}\rho+4} \rho dz d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 \rho z\Big|_0^{-\frac{4}{3}\rho+4} d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^3 \left(-\frac{4}{3}\rho^2 + 4\rho\right) d\rho d\theta$$

$$V = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{4}{9}\rho^3 + 2\rho^2\right)\Big|_0^3 d\theta$$

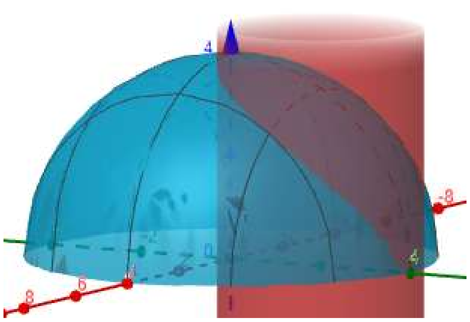
$$= \int_0^{2\pi} (-12+18) d\theta$$

$$= (6\cdot\theta)|_0^{2\pi}$$

$$= 12\pi$$

---

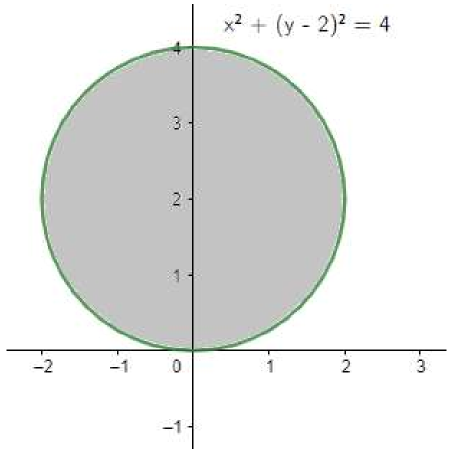
20. *Calcule el volumen del sólido que es interior a la semiesfera* $z = \sqrt{16-x^2-y^2}$ *y al cilindro* $x^2+y^2-4y=0$.



Proyección sobre el plano xy (z = 0)

$$0 = \sqrt{16-x^2-y^2} \quad \rightarrow \quad x^2+y^2 = 16$$

$$x^2+y^2-4y = 0 \quad \rightarrow \quad 16-4y = 0 \quad \rightarrow \quad y = 4$$



Cambio a coordenadas cilíndricas

Coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \rho \leq \cdots \\ 0 \leq z \leq \cdots \end{array}$$

Jacobiano: $J = \rho$

Veamos el límite superior de variación de ρ.

$$x^2 + y^2 - 4y = 0 \quad \rightarrow \quad \rho^2 - 4\rho\sin\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \rho = 4\sin\theta$$

Por lo tanto, $0 \leq \rho \leq 4\sin\theta$

Ahora determinemos el límite superior de variación de z, en coordenadas cilíndricas.

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \quad \rightarrow \quad z = \sqrt{16 - \rho^2} \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq z \leq \sqrt{16 - \rho^2}$$

Entonces, el volumen del sólido es:

$$V = \int_0^{\pi}\int_0^{4\sin\theta}\int_0^{\sqrt{16-\rho^2}} \rho\, dz d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{4\sin\theta} \rho z\Big|_0^{\sqrt{16-\rho^2}} d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{4\sin\theta} \rho\sqrt{16 - \rho^2}\, d\rho d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{(16-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\Bigg|_0^{4\sin\theta} d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\int_0^{\pi}\left[(16 - 16\sin^2\theta)^{3/2} - 16^{3/2}\right] d\theta$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\left[(16(1 - \sin^2\theta))^{3/2} - 16^{3/2}\right] d\theta$$

$$V = -\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\left[16^{3/2}(\cos^2\theta)^{3/2} - 64\right]d\theta$$

$$V = -\frac{1}{3}\cdot 64\int_0^{\pi}[\cos^3\theta - 1]d\theta$$

$$V = -\frac{64}{3}\left(\int_0^{\pi}\cos^3\theta\, d\theta - \int_0^{\pi} d\theta\right)$$

$$V = -\frac{64}{3}\left(\int_0^{\pi}\cos^2\theta\cdot\cos\theta\, d\theta - \theta|_0^{\pi}\right)$$

$$V = -\frac{64}{3}\left(\int_0^{\pi}(1-\sin^2\theta)\cdot\cos\theta\, d\theta - \pi\right)$$

$$V = -\frac{64}{3}\left(\int_0^{\pi}\cos\theta\, d\theta - \int_0^{\pi}\sin^2\theta\cdot\cos\theta\, d\theta - \pi\right)$$

$$V = -\frac{64}{3}\left(\sin\theta|_0^{\pi} - \frac{\sin^3\theta}{3}\Bigg|_0^{\pi} - \pi\right)$$

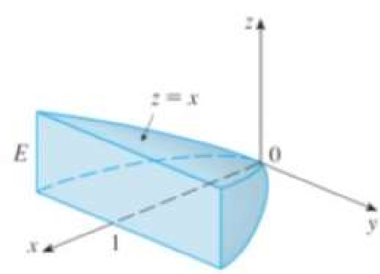
$$V = -\frac{64}{3}(-\pi)$$

$$V = \frac{64}{3}\pi$$

----

24. *Determine la masa del sólido con densidad constante $\sigma(x,y,z) = \sigma$, limitado por la superficie del ejercicio 16-b.*

$$S:\begin{cases} x = y^2 \\ x = z \\ x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$



De la solución del ejercicio 16-b, se tienen los siguientes límites de integración

$-1 \le y \le 1 \quad ; \quad y^2 \le x \le 1 \quad ; \quad 0 \le z \le x$

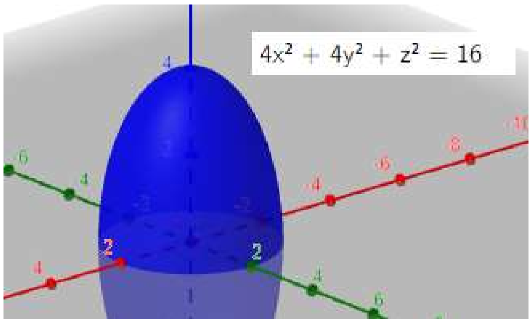
Entonces,

$$M = \iiint_R \sigma(x,y,z)dxdydz = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_0^{x}\sigma dzdxdy = \frac{4}{5}\sigma$$

Ver la solución del ejercicio 16-b

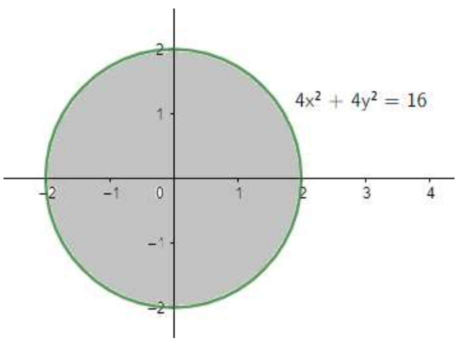
----

25. *Halle la masa del elipsoide dado por la ecuación* $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$*, con* $z \geq 0$*. La densidad en cada punto del elipsoide, coincide con la distancia entre el punto y el plano* xy*.*



$$4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16 \quad ; \quad z \geq 0$$

Proyección sobre el plano xy (z = 0)



Cambio a coordenadas cilíndricas

$$m = \iiint_R \sigma(x, y, z)dxdydz \qquad ; \qquad \sigma(x, y, z) = z$$

Coordenadas cilíndricas,

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\, sen\,\theta \\ z = z \end{cases} \rightarrow \quad \begin{array}{c} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq z \leq \cdots \end{array}$$

Jacobiano: $J = \rho$

Determinemos el límite superior de variación de z, en coordenadas cilíndricas.

$$z = \sqrt{16 - 4x^2 - 4y^2} \quad \rightarrow \quad z = \sqrt{16 - 4\rho^2} \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq z \leq \sqrt{16 - 4\rho^2}$$

Entonces,

$$m = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\sqrt{16-4\rho^2}} z\rho dzd\rho d\theta$$

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{\sqrt{16-4\rho^2}} d\rho d\theta$$

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{\rho}{2}(16 - 4\rho^2) d\rho d\theta$$

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (8\rho - 2\rho^3) d\rho d\theta$$

$$m = \int_0^{2\pi} \left.\left(4\rho^2 - \frac{\rho^4}{2}\right)\right|_0^2 d\theta$$

$$m = \int_0^{2\pi} 8 d\theta$$

$$m = 8\theta|_0^{2\pi}$$

$$m = 16\pi$$