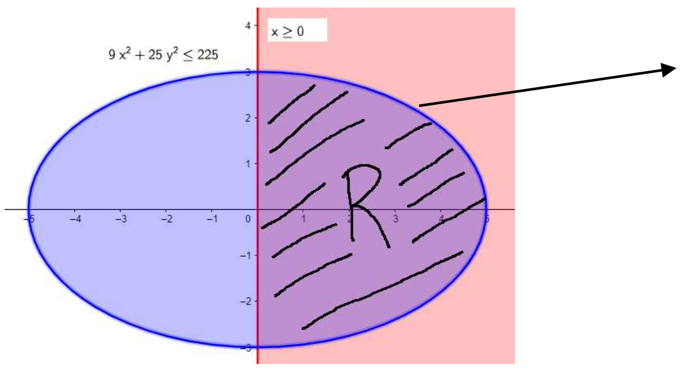
Cálculo II – Análisis Matemático II – Clase jueves 28 / 4 – Ejercicios propuestos: 7-b, 16-b, 16-d, 19-a y 19-j.

7. *Calcule el área de la región dada a continuación.*

b. $R: \begin{cases} 9x^2 + 25y^2 \leq 225 \\ x \geq 0 \end{cases}$

Solución.



$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Como estamos en presencia de una elipse, hacemos cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas polares generalizadas.

$$\begin{cases} x = 5\rho\cos\theta \\ y = 3\rho\sin\theta \end{cases} \rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad ; \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

$J = 5 \cdot 3 \cdot \rho = 15\rho$

Luego,

$$A(R) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 15\rho d\rho d\theta$$

$$= 15 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^1 d\theta$$

$$= 15 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\theta$$

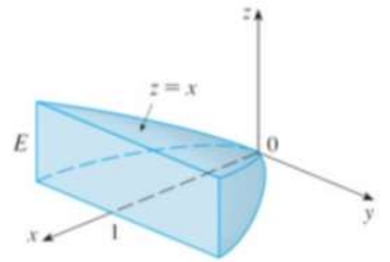
$$= \frac{15}{2}\theta\bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{15}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

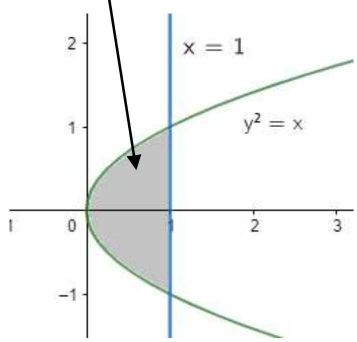
$$A(R) = \frac{15}{2}\pi$$

***16.** Determine el volumen de los siguientes sólidos.*

b. $\begin{cases} x = y^2 \\ x = z \\ x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$



Proyección sobre el plano xy



$$-1 \leq y \leq 1$$
$$y^2 \leq x \leq 1$$
$$0 \leq z \leq x$$

Entonces, el volumen del sólido está dado por:

$$V = \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{x} dzdxdy$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} z|_0^x dxdy$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{y^2}^{1} xdxdy$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2}\bigg|_{y^2}^{1} dy$$

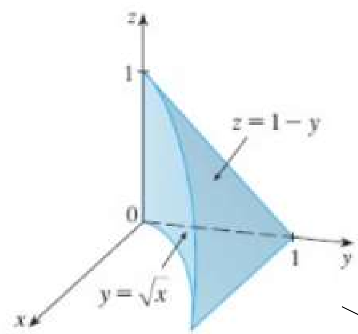
$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2} - \frac{y^4}{2}\right) dy$$

$$= \left(\frac{y}{2} - \frac{y^5}{10}\right)\bigg|_{-1}^{1}$$

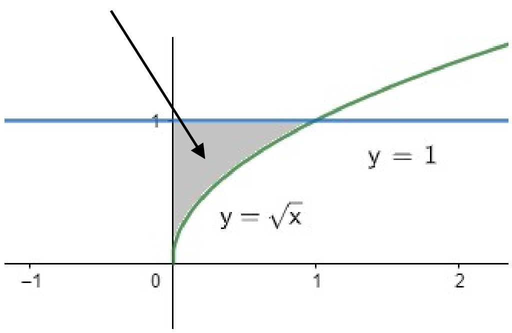
$$V = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} - \left(-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{10}\right)\right) = \frac{4}{5}$$

---

16. d.



Proyección sobre el plano xy (z = 0)



$$0 \le y \le 1$$
$$0 \le x \le y^2$$
$$0 \le z \le 1 - y$$

Entonces, el volumen del sólido está dado por:

$$V = \int_0^1 \int_0^{y^2} \int_0^{1-y} dz dx dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{y^2} z\Big|_0^{1-y} dx dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^{y^2} (1 - y) dx dy$$

$$= \int_0^1 (x - yx)\Big|_0^{y^2} dy$$

$$= \int_0^1 (y^2 - y^3) dy$$

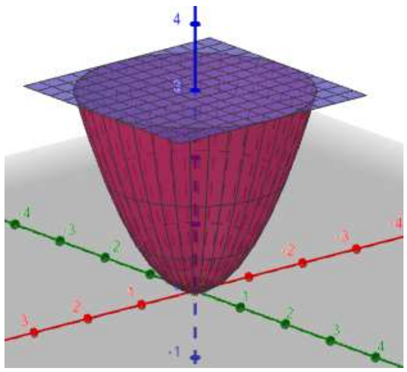
$$= \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^1$$

$$V = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

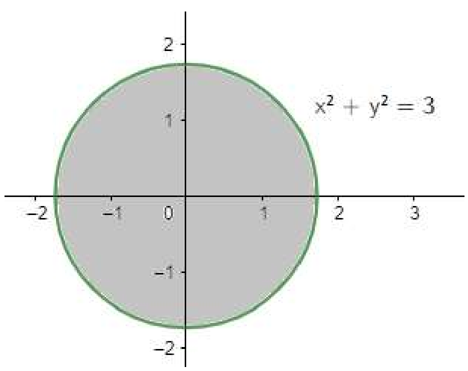
---

19. *Calcule el volumen de los sólidos definidos a continuación.*

a. $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z \leq 3 \end{cases}$



Proyección sobre el plano xy (z = 3)



Cambio a coordenadas cilíndricas

Coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \rho \leq \sqrt{3}$$

$$\rho^2 \leq z \leq 3$$

Jacobiano: $J = \rho$

Entonces, el volumen del sólido es:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_{\rho^2}^{3} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \rho z\Big|_{\rho^2}^{3} d\rho\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} (3\rho - \rho^3)\, d\rho\, d\theta$$

$$V=\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^{\sqrt{3}}d\theta$$

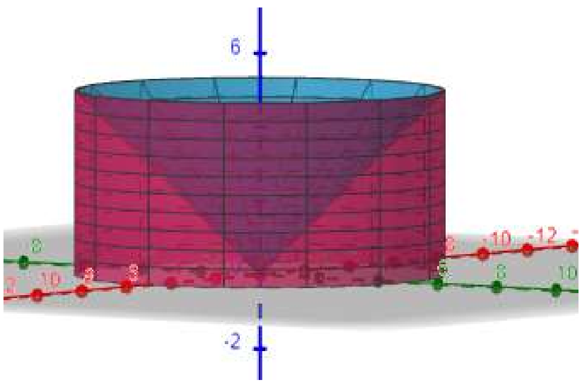
$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{9}{2}-\frac{9}{4}\right)d\theta$$

$$=\left(\frac{9}{4}\cdot\theta\right)\Big|_0^{2\pi}$$

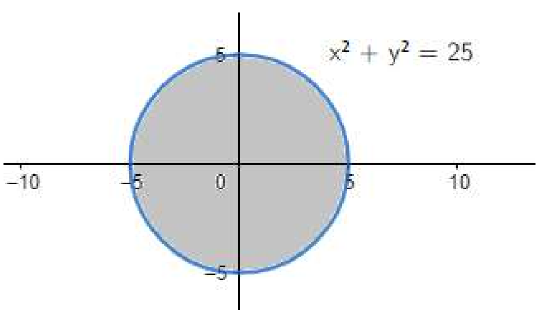
$$=\frac{9}{2}\pi$$

----

19. j. $\begin{cases} z^2 \leq x^2+y^2 \\ x^2+y^2 \geq 25 \\ z \geq 0 \end{cases}$



Proyección sobre el plano xy (z = 5)



Cambio a coordenadas cilíndricas

Coordenadas cilíndricas

$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases}$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$0 \leq \rho \leq 5$

$0 \leq z \leq \rho$

Jacobiano: $J=\rho$

Entonces, el volumen del sólido es:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^5 \int_0^\rho \rho dz d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^5 \rho z\Big|_0^\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^5 \rho^2 d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^5 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{125}{3} d\theta$$

$$= \left(\frac{125}{3} \cdot \theta\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{250}{3}\pi$$