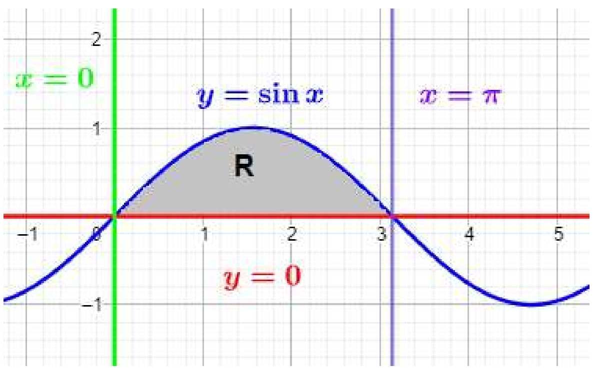
Cálculo II – Análisis Matemático II – Viernes 22/4 – Ejercicios 2-c, 4-h, 7-c, 7-f y 10 de Integrales Múltiples

2. *Grafique la región de integración R y plantee mediante integración iterada, de dos formas distintas* $\iint_R \ dxdy$ *y* $\iint_R \ dydx$.

c. $\begin{cases} y \leq sen\ x \\ y \geq 0 \\ 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

Solución.



Si dejamos x constante, tenemos que

$0 \leq x \leq \pi \quad ; \quad 0 \leq y \leq sen\ x$

Entonces, $\iint_R \ dydx = \int_0^{\pi} \int_0^{sen\ x} dydx$

Si dejamos y constante, tenemos que

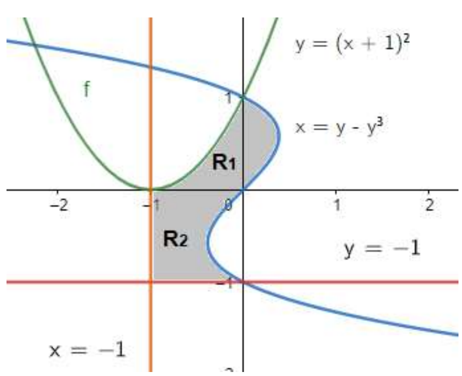
$0 \leq y \leq 1 \quad ; \quad -arcsen\ y \leq x \leq arcsen\ y$

Entonces, $\iint_R \ dxdy = \int_0^{1} \int_{-arcsen\ y}^{arcsen\ y} dxdy$

---

4. *Calcule el área de las siguientes regiones*

h.



Solución.

Trabajemos primero con **R1**

$R_1 : \ 0 \leq y \leq 1 \quad ; \quad \sqrt{y} - 1 \leq x \leq y - y^3$

Entonces,

$$A(R_1) = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}-1}^{y-y^3} dxdy$$

$$= \int_0^1 x|_{\sqrt{y}-1}^{y-y^3} dy$$

$$= \int_0^1 [y - y^3 - (\sqrt{y} - 1)]dy$$

$$= \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} - \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + y\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{7}{12}$$

Ahora calculemos el área de **R2**

$R_2 : \ -1 \leq y \leq 0 \quad ; \quad -1 \leq x \leq y - y^3$

$$A(R_2) = \int_{-1}^0 \int_{-1}^{y-y^3} dxdy$$

$$= \int_{-1}^0 x|_{-1}^{y-y^3} dy$$

$$= \int_{-1}^0 [y - y^3 - (-1)]dy$$

$$= \int_{-1}^0 (y - y^3 + 1)dy$$

$$= \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} + y\right)\Bigg|_{-1}^0$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + (-1)\right)$$

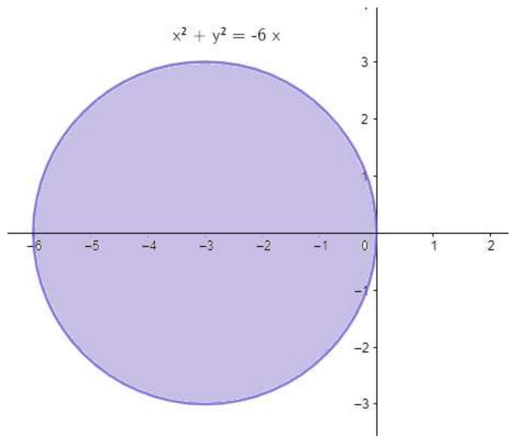
$$= \frac{3}{4}$$

Luego, el área de la región sombreada es

$$A = A(R_1) + A(R_2) = \frac{7}{12} + \frac{3}{4} = \frac{4}{3} = 1.33$$

__7.__ Calcule el área de las regiones dadas a continuación.

c.



Solución.

Hacemos cambio de coordenadas cartesianas a polares

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$J = \rho$$

Determinemos los límites de integración de las variables θ y ρ. La ecuación de la circunferencia, en coordendas polares es

$$(\rho\cos\theta)^2 + (\rho\sin\theta)^2 = -6\rho\cos\theta$$

$$\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\theta = -6\rho\cos\theta$$

$$\rho^2\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = -6\rho\cos\theta$$

$$\rho^2 = -6\rho\cos\theta$$

$$\rho = -6\cos\theta$$

Por lo tanto, los límites de integración de las variables serán

$$\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3}{2}\pi \qquad ; \qquad 0 \le \rho \le -6\cos\theta$$

Entonces, el área de la región sombreada será

$$A(R) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\int_0^{-6\cos\theta} \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^{-6\cos} d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{(-6\cos\theta)^2}{2} d\theta$$

$$= 18 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= 18 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} d\theta$$

$$= 9 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} [1+\cos(2\theta)] d\theta$$

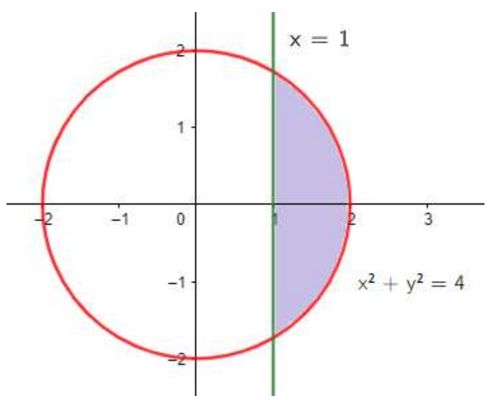
$$= 9\left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}$$

$$= 9\left[\frac{3}{2}\pi + \frac{\sin(3\pi)}{2} - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(\pi)}{2}\right)\right]$$

$$= 9\pi$$

---

f.



Primero determinamos los puntos de intersección entre la circunferencia y la recta vertical, de ecuación $x = 1$.

$$\begin{cases} x = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \quad \rightarrow \quad 1 + y^2 = 4 \quad \rightarrow \quad y^2 = 3 \quad \rightarrow \quad y = \pm\sqrt{3}$$

Por lo tanto, los puntos de intersección son $P_1 = (1, \sqrt{3})$ y $P_2 = (1, -\sqrt{3})$

Ahora hacemos un cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$J = \rho$

Determinemos los límites de integración de θ.

$$-\sqrt{3} \leq y \leq \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad -\sqrt{3} \leq 2\sin\theta \leq \sqrt{3} \quad \rightarrow \quad \frac{-\sqrt{3}}{2} \leq \sin\theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\rightarrow \quad arcsen\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \leq \theta \leq arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \rightarrow \quad -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

Ahora veamos los límites de integración de ρ.

$$1 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2} \quad \rightarrow \quad 1 \leq \rho\cos\theta \leq \sqrt{4 - (2\sin\theta)^2}$$

$$\rightarrow \quad 1 \leq \rho\cos\theta \leq \sqrt{4 - 4\sin^2\theta} \quad \rightarrow \quad 1 \leq \rho\cos\theta \leq \sqrt{4}\sqrt{1 - \sin^2\theta}$$

$$\rightarrow \quad 1 \leq \rho\cos\theta \leq 2\sqrt{\cos^2\theta} \quad \rightarrow \quad 1 \leq \rho\cos\theta \leq 2\cos\theta \quad \rightarrow$$

$$\frac{1}{\cos\theta} \leq \rho \leq 2$$

Entonces, el área de la región sombreada es

$$A(R) = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2} \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{\frac{1}{\cos\theta}}^{2} d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(2 - \frac{1}{2\cos^2\theta}\right) d\theta$$

$$= 2\theta\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2\theta \, d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\tan\theta\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{2}{3}\pi + \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\left(\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) - \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2.4567$$

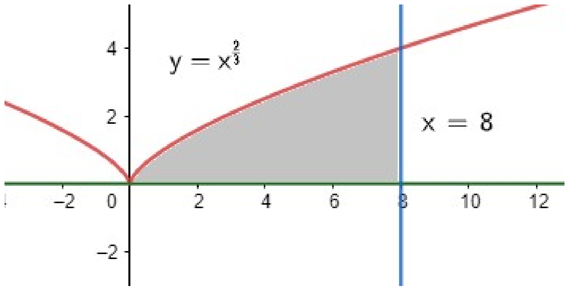
----

10. *Una lámina de densidad $\delta(x, y) = xy$ está limitada por el eje x, la recta $x = 8$ y la curva $y = x^{2/3}$. Encuentre su masa total.*

Solución.

$$m = \iint_R \delta(x, y)dA = \iint_R xydA$$

Determinemos los límites de integración de las variables x y y.



$0 \leq x \leq 8 \quad ; \quad 0 \leq y \leq x^{\frac{2}{3}}$

$$m = \int_0^8 \int_0^{x^{\frac{2}{3}}} xydydx$$

$$= \int_0^8 \frac{xy^2}{2}\Big|_0^{x^{\frac{2}{3}}} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^8 x^{\frac{7}{3}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{3}{10}x^{\frac{10}{3}}\Big|_0^8$$

$$= \frac{768}{5}$$

$$= 153.6$$