Cálculo II – Viernes 8/4/2022 – Práctica 1 – Ejercicios 35-b-2, 37, 39-b, 43-a y 43-c.

35. b. *Verifique las condiciones (Teorema de existencia y unicidad de la función implícita de una variable) y calcule* $\frac{dy}{dx}$ *en los puntos indicados en cada caso.*

Solución.

2. $F(x,y) = -xy^2 + x^2 - 2 = 0$; $P_1 = (1,0)$, $P_2 = (-1,1)$

Analizamos primero $P_1 = (1,0)$

- $F(1,0) = -1 \cdot 0^2 + 1^2 - 2 = -1 \neq 0 \quad \rightarrow$ No se verifica la primera condición del teorema

Analizamos ahora $P_2 = (-1,1)$

- $F(-1,1) = -(-1) \cdot 1^2 + (-1)^2 - 2 = 0$
- $F_x(-1,1) = (-y^2 + 2x)|_{(-1,1)} = -3$

  $F_y(-1,1) = -2xy|_{(-1,1)} = 2$

  Existen y son continuas en un entorno de P_2
- $F_y(-1,1) = 2 \neq 0$

En los tres ítems anteriores se puede ver que se verifican las condiciones del teorema, para $P_2 = (-1,1)$.

Luego,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = -\frac{F_x(P_2)}{F_y(P_2)} = -\frac{(-3)}{2} = \frac{3}{2}$$

---

37. *Sea* $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 9$. *Encuentre una aproximación lineal de la función* $z = f(x,y)$*, en el entorno del punto* $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$.

Solución.

Aproximación lineal (desarrollo en serie de Taylor, de primer orden),

$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$.

Como $F(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 9 = 0$ es una función implícita, veamos si verifica las condiciones del teorema de la función implícita de varias variables, para poder encontrar las derivadas parciales que intervienen en la fórmula de la aproximación lineal.

- $F(1,1,1) = 1^3 + 1^3 + 1^3 + 6 - 9 = 0$
- $F_x(1,1,1) = (3x^2 + 6yz)|_{(1,1,1)} = 9$

  $F_y(1,1,1) = (3y^2 + 6xz)|_{(1,1,1)} = 9$

  $F_z(1,1,1) = (3z^2 + 6xy)|_{(1,1,1)} = 9$

  Por lo tanto $F_x(1,1,1)$, $F_y(1,1,1)$ y $F_z(1,1,1)$ existen y son continuas en un entorno de $(1,1,1)$.

- $F_z(1,1,1) = 9 \neq 0$

Como la función $F(x,y,z)$ verifica las tres condiciones del teorema, entonces existe $z = f(x,y)$, continua y derivable, tal que

$f_x(1,1) = -\frac{F_x(1,1,1)}{F_z(1,1,1)} = -\frac{9}{9} = -1$ y $f_y(1,1) = -\frac{F_y(1,1,1)}{F_z(1,1,1)} = -\frac{9}{9} = -1$

Luego, la aproximación lineal será

$f(x,y) \approx 1 + (-1)(x-1) + (-1)(y-1).$

$f(x,y) \approx 1 - x + 1 - y + 1$

$f(x,y) \approx -x - y + 3$

---

39. b. *Desarrolle la función $f(x,y) = \ln(x^2 + y)$ en potencias de x y $(y-1)$, hasta el segundo orden.*

Solución.

Desarrollo en serie de Taylor de segundo orden,

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$+\frac{1}{2}\left(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right)$$

Determinamos la imagen y las derivadas de la función $f(x,y) = \ln(x^2 + y)$, en el punto $P_0 = (0,1)$.

$f(x_0,y_0) = f(0,1) = \ln(0^2 + 1) = 0$

$$f_x(x_0,y_0) = f_x(0,1) = \left.\frac{2x}{x^2+y}\right|_{(0,1)} = 0$$

$$f_y(x_0,y_0) = f_y(0,1) = \left.\frac{1}{x^2+y}\right|_{(0,1)} = 1$$

$$f_{xx}(x_0,y_0) = f_{xx}(0,1) = \left.\frac{2(x^2+y) - 2x2x}{(x^2+y)^2}\right|_{(0,1)} = 2$$

$$f_{xy}(x_0,y_0) = f_{xy}(0,1) = \left.\frac{0(x^2+y) - 2x}{(x^2+y)^2}\right|_{(0,1)} = 0$$

$$f_{yy}(x_0,y_0) = f_{yy}(0,1) = \left.\frac{0(x^2+y) - 1}{(x^2+y)^2}\right|_{(0,1)} = -1$$

Reemplazando,

$$f(x,y) \approx 0 + 0(x-0) + 1(y-1) + \frac{1}{2}(2(x-0)^2 + 2\cdot 0(x-0)(y-1) + (-1)(y-1)^2)$$

$$f(x,y) \approx y - 1 + \frac{1}{2}(2x^2 - (y-1)^2)$$

$$f(x,y) \approx y - 1 + x^2 - \frac{(y-1)^2}{2}$$

$$\boxed{f(x,y) \approx x^2 - \frac{(y-1)^2}{2} + y - 1}$$

---

43. *Calcule y clasifique los extremos de las siguientes funciones:*

a. $f(x,y) = 14x^2 - 2x^3 + 2y^2 + 4xy$

Solución.

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 28x - 6x^2 + 4y = 0 \\ f_y(x,y) = 4y + 4x = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación, tenemos que $4y + 4x = 0 \quad \rightarrow \quad y = -x$

Reemplazando en la primera ecuación, $28x - 6x^2 + 4y = 0 \quad \rightarrow \quad 28x - 6x^2 + 4(-x) = 0$

$\rightarrow \quad -6x^2 + 24x = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0 \ ; \ x_2 = 4 \quad \rightarrow \quad y_1 = 0 \ ; \ y_2 = -4$

Entonces, los dos puntos críticos son

$$\boxed{P_1 = (0,0) \ ; \quad P_2 = (4,-4)}$$

Ahora clasificaremos dichos puntos críticos,

$$\det[H(x,y)] = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 28-12x & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 4(28-12x) - 16 = -48x + 96$$

$\det[H(P_1)] = \det[H(0,0)] = -48 \cdot 0 + 96 = 96 > 0 \quad \rightarrow$ En $(0,0,f(0,0))$ hay extremo. Como $f_{xx}(0,0) = 28 - 12 \cdot 0 = 28 > 0$, entonces en (0,0,0) hay un mínimo relativo.

$\det[H(P_2)] = \det[H(-4,4)] = -48 \cdot 4 + 96 = -96 < 0 \quad \rightarrow$ En $(4,-4,f(4,-4))$ no hay extremo.

c. $f(x,y) = 6xy + \frac{x^2}{2} + xy^2$

Solución.

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 6y + x + y^2 = 0 \\ f_y(x,y) = 6x + 2xy = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación, tenemos que $6y + x + y^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -y^2 - 6y$

Reemplazando en la segunda ecuación, $6x + 2xy = 0 \quad \rightarrow \quad 6(-y^2 - 6y) + 2(-y^2 - 6y)y = 0$

$\rightarrow \quad -6y^2 - 36y - 2y^3 - 12y^2 = 0 \quad \rightarrow \quad -2y^3 - 18y^2 - 36y = 0 \quad \rightarrow \quad y_1 = 0 \quad ; \quad y_2 = -6 \quad ; \quad y_3 = -3$

Luego, $x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = 0 \quad ; \quad x_3 = 9$

Entonces, los tres puntos críticos son

$$\boxed{P_1 = (0,0) \quad ; \quad P_2 = (0,-6) \quad ; \quad P_3 = (9,-3)}$$

Ahora clasificaremos dichos puntos críticos,

$$\det[H(x,y)] = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6+2y \\ 6+2y & 2x \end{vmatrix} = 2x - (6+2y)^2$$

$\det[H(P_1)] = \det[H(0,0)] = 2 \cdot 0 - (6 + 2 \cdot 0)^2 = -36 < 0 \quad \rightarrow$ En $(0,0,f(0,0))$ no hay extremo.

$\det[H(P_2)] = \det[H(0,-6)] = 2 \cdot 0 - \big(6 + 2(-6)\big)^2 = -36 < 0 \quad \rightarrow$ En $(0,-6,f(0,-6))$ no hay extremo.

$\det[H(P_3)] = \det[H(9,-3)] = 2 \cdot 9 - \big(6 + 2(-3)\big)^2 = 18 > 0 \quad \rightarrow$ En $(9,-3,f(9,-3))$ hay extremo. Como $f_{xx}(9,-3) = 1 > 0$, entonces en $(9,-3,-81/2)$ hay un mínimo relativo.