**Cálculo II – Viernes 1/4/2022 – Práctica 1 – Ejercicios 15-b, 17-a, 17-e, 22-c, 24, 26-c, 33.**

***15.*** *Calcule el diferencial primero y segundo de las siguientes funciones. Indique la expresión de los diferenciales para los puntos dados.*

***b.*** $f(x,y) = \frac{x}{y}$ ; $P = (1,2)$

Diferencial primero, $df(x,y) = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$.

Diferencial segundo, $d^2f(x,y) = f_{xx}(x,y)dx^2 + 2f_{xy}(x,y)dxdy + f_{yy}(x,y)dy^2$.

$$f_x(x,y) = \frac{1}{y} \qquad f_y(x,y) = -\frac{x}{y^2}$$

$$f_{xx}(x,y) = 0 \qquad f_{yy}(x,y) = \frac{2x}{y^3}$$

$$f_{xy}(x,y) = -\frac{1}{y^2}$$

$$df(x,y) = \tfrac{1}{y}dx + \left(-\tfrac{x}{y^2}\right)dy = \tfrac{1}{y}dx - \tfrac{x}{y^2}dy \qquad \rightarrow \qquad df(1,2) = \tfrac{1}{2}dx - \tfrac{1}{4}dy$$

$$d^2f(x,y) = 0dx^2 + 2\left(-\frac{1}{y^2}\right)dxdy + \frac{2x}{y^3}dy^2 = -\frac{2}{y^2}dxdy + \frac{2x}{y^3}dy^2$$

$$d^2f(1,2) = -\frac{2}{2^2}dxdy + \frac{2\cdot 1}{2^3}dy^2 = -\frac{1}{2}dxdy + \frac{1}{4}dy^2$$

$$\boxed{\begin{array}{c} df(x,y) = \tfrac{1}{y}dx - \tfrac{x}{y^2}dy \quad ; \quad df(1,2) = \tfrac{1}{2}dx - \tfrac{1}{4}dy \\ d^2f(x,y) = -\tfrac{2}{y^2}dxdy + \tfrac{2x}{y^3}dy^2 \quad ; \quad d^2f(1,2) = -\tfrac{1}{2}dxdy + \tfrac{1}{4}dy^2 \end{array}}$$

---------------------------------------------------------------------------------------------------------

***17.*** *Clasifique los siguientes campos en escalares o vectoriales. Indique el tipo de variable y el campo de existencia en cada caso. Cuando sea posible, calcule las imágenes de los puntos (1,0), (1,-1,1), (-1,0,0) y 4.*

***a.*** $f(x,y) = 40 - 4x^2 - y^2$

Campo escalar, de variable vectorial.

Dominio (campo de existencia), $D = \mathbb{R}^2$.

$f(1,0) = 40 - 4 \cdot 1^2 - 0^2 = 36$

**e.** $\boldsymbol{H}(t) = t^{1/2}\boldsymbol{i} + t^3\boldsymbol{j}$

Campo vectorial, de variable escalar.

Dominio (campo de existencia), $D = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$.

$\boldsymbol{H}(4) = 4^{1/2}\boldsymbol{i} + 4^3\boldsymbol{j} = 2\boldsymbol{i} + 64\boldsymbol{j}$

---------------------------------------------------------------------------------------------------------

***22.*** *Defina y determine el vector gradiente para los siguientes campos:*

**c.** $f(x,y) = sen\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \quad , \quad P = (1,0)$

Vector gradiente, $\boldsymbol{\nabla} f(x,y) = f_x(x,y)\boldsymbol{i} + f_y(x,y)\boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{bmatrix}$.

$$f_x(x,y) = cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2x = \frac{x\,cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_x(1,0) = \frac{1 \cdot cos\left(\sqrt{1^2+0^2}\right)}{\sqrt{1^2+0^2}} = 0.54$$

$$f_y(x,y) = cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2y = \frac{y\,cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_y(1,0) = \frac{0 \cdot cos\left(\sqrt{1^2+0^2}\right)}{\sqrt{1^2+0^2}} = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \boldsymbol{\nabla} f(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{x\,cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{y\,cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{bmatrix} \\ \\ \boldsymbol{\nabla} f(1,0) = \begin{bmatrix} 0.54 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}}$$

---------------------------------------------------------------------------------------------------------

***24.*** *Determine la dirección en la cual la función $t(x,y)=ye^{sen(x-y)}$ aumenta más rápidamente en el punto (1,1) y halle esa razón de cambio.*

La dirección de máximo crecimiento de la función en un punto, está dada por el gradiente de la función en dicho punto. Luego,

$$\nabla t(x,y)=\begin{bmatrix} t_x(x,y)\\ t_y(x,y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ye^{sen(x-y)}cos(x-y)\\ e^{sen(x-y)}-ye^{sen(x-y)}cos(x-y)\end{bmatrix}$$

$$\nabla t(1,1)=\begin{bmatrix} e^{sen(1-1)}cos(1-1)\\ e^{sen(1-1)}-e^{sen(1-1)}cos(1-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\nabla t(1,1)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}$$

Dirección de máximo aumento de la función $t(x,y)$, en el punto (1,1)

Hallemos ahora la razón de cambio → Derivada direccional máxima,

$$D_{\boldsymbol{v}}f(1,1)_{max}=\|\nabla t(1,1)\|=\sqrt{1+0}=1$$

-----------------------------------------------------------------------------------------------------------

***26.*** *Calcule la derivada direccional de los siguientes campos:*

***c.*** $z=y^3-3x^2y-xy$, *en el punto* $P_0=(3,1)$, *en la dirección que va de* $P_1=(2,2)$ *a* $P_2=(-1,6)$.

$$D_{\boldsymbol{v}}f(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)^T\cdot\boldsymbol{v}=[f_x(x_0,y_0)\quad f_y(x_0,y_0)]\cdot\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}$$

$$f_x(x_0,y_0)=f_x(3,1)=(-6xy-y)|_{(3,1)}=-19$$

$$f_y(x_0,y_0)=f_y(3,1)=(3y^2-3x^2-x)|_{(3,1)}=-27$$

$$\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{P_1P_2}}{\|\boldsymbol{P_1P_2}\|}=\frac{1}{\|\boldsymbol{P_1P_2}\|}\begin{bmatrix}-1-2\\6-2\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{(-3)^2+4^2}}\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3/5\\4/5\end{bmatrix}$$

$$D_{\boldsymbol{v}}f(x_0,y_0)=D_{\boldsymbol{v}}f(3,1)=[-19\quad -27]\cdot\begin{bmatrix}-\frac{3}{5}\\ \frac{4}{5}\end{bmatrix}=-\frac{51}{5}$$

$$\boxed{D_{\boldsymbol{v}}f(3,1)=-\frac{51}{5}=-10.2}$$

---

***33.*** *Sea* $f(x,y) = x^2 + xy^3$*, donde* $x = x(t) = \cos t$*;* $y = y(t) = e^t$*. Se pide que,*

***a.*** *Derive* $F(t) = f(x(t), y(t))$*, respecto de t, aplicando la regla de la cadena.*

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x + y^3 \qquad \frac{dx}{dt} = -sen\ t$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3xy^2 \qquad \frac{dy}{dt} = e^t$$

$$\frac{dF}{dt} = (2x + y^3)(-sen\ t) + 3xy^2 e^t = -(2\cos t + e^{3t})sen\ t + 3\cos t\, e^{2t} e^t$$

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = -2\cos t\ \ sen\ t - e^{3t}\,\mathrm{sen}\ \ t + 3e^{3t}\cos t}$$

***b***. *Halle, explícitamente, la función compuesta* $F(t)$ *y derívela.*

$$F(t) = f\big(x(t), y(t)\big) = f(\cos t\,, e^t) = (\cos t)^2 + \cos t\,(e^t)^3 = \cos^2 t + e^{3t}\cos t$$

$$\frac{dF}{dt} = 2\cos t\,(-sen\ t) + 3e^{3t}\cos t + e^{3t}(-sen\ t)$$

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = -2\cos t\ \ sen\ t - e^{3t}\,\mathrm{sen}\ \ t + 3e^{3t}\cos t}$$

***c.*** *Analice ambos resultados*

Ambos resultados son iguales.