**Cálculo II – Viernes 25/3/2022 – Práctica 1 – Ejercicios 13-a, 14-a, 20, 21.**

***13.*** *Dados los siguientes campos escalares, indique si son diferenciables. Cuando sea posible, determine la región de diferenciabilidad.*

**a.** $f(x,y) = \ln(2x + y^2)\,;\quad P_0 = (-2,2);\ \ P_1 = (0,1);\quad P_2 = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

El dominio de $f$ es $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y^2 > 0\}$.

¿ $P_0 \in D$? $\rightarrow \quad 2(-2) + 2^2 = 0 \quad \rightarrow \quad P_0 \notin D$

¿ $P_1 \in D$? $\rightarrow \quad 2 \cdot 0 + 1^2 = 1 > 0 \quad \rightarrow \quad P_1 \in D$

¿ $P_2 \in D$? $\rightarrow \quad 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1^2 = 0 \quad \rightarrow \quad P_2 \notin D$

Luego, el único punto en el que se puede analizar la diferenciabilidad de la función es $P_1 = (0,1)$.

Calculemos las derivadas parciales de la función

$$f_x(x,y) = \frac{1}{2x + y^2} \cdot 2 = \frac{2}{2x + y^2} \qquad \rightarrow \qquad f_x(P_1) = f_x(0,1) = \frac{2}{2 \cdot 0 + 1^2} = 2$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{2x + y^2} \cdot 2y = \frac{2y}{2x + y^2} \qquad \rightarrow \qquad f_y(P_1) = f_y(0,1) = \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 0 + 1^2} = 2$$

Como las derivadas parciales de $f$ existen y son continuas en $P_1 = (0,1)$, entonces $f$ es diferenciable en dicho punto.

Región de diferenciabilidad, $\quad D \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y^2 \neq 0\} = D$.

---

***14.*** *Dada la función $f(x,y) = yx^2e^y$, halle el incremento y el diferencial en el punto (1,2). Compare los resultados obtenidos.*

**a.** $z = f(x,y) = yx^2e^y \quad ; \quad \Delta x = 1 \quad ; \quad \Delta y = 2$

Incremento, $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f(1+1, 2+2) - f(1,2)$

$f(1+1, 2+2) = f(2,4) = 4 \cdot 2^2 e^4 = 873{,}57$

$f(1,2) = 2 \cdot 1^2 e^2 = 14{,}78$

$$\boxed{\Delta z = 873{,}57 - 14{,}78 = 858{,}79}$$

Diferencial, $dz = f_x(x_0, y_0) \cdot dx + f_y(x_0, y_0) \cdot dy = f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$

Por ser $x$ y $y$ las variables independientes

$$dz = 2xye^y \Delta x + (x^2e^y + yx^2e^y)\Delta y$$

$$dz|_{(1,2)} = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot e^2 \cdot 1 + (1^2e^2 + 2 \cdot 1^2e^2) \cdot 2 = 10e^2 = 73{,}89$$

$$\boxed{dz = 73{,}89}$$

Los resultados obtenidos son muy distintos, esto se debe a que $\Delta x$ y $\Delta y$ son valores muy grandes.

---

***20.*** *Dada la superficie $z = x^2 + 3y^3 - (xy + 4)$. Halle el vector normal, el plano tangente y la recta normal en el punto (2,1,1). ¿Qué condición debe cumplir la función $z = f(x, y)$ para admitir plano tangente?*

***Solución.***

Ecuación del plano tangente, $z - z_0 = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$.

$$z - 1 = (2x - y)|_{(2,1)} \cdot (x - 2) + (9y^2 - x)|_{(2,1)} \cdot (y - 1)$$

$$z - 1 = (2 \cdot 2 - 1) \cdot (x - 2) + (9 \cdot 1^2 - 2) \cdot (y - 1)$$

$$z - 1 = 3 \cdot (x - 2) + 7 \cdot (y - 1)$$

$$z = 3x + 7y - 6 - 7 + 1$$

$$\boxed{3x + 7y - z - 12 = 0}$$

Ecuación del plano tangente a la función $f$, en el punto (2,1,1)

Ecuación de la recta normal, $\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)} = \frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$.

$$\frac{x - 2}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - 1}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - 1}{-1}$$

$$\boxed{\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{7}=\frac{z-1}{-1}}$$

Ecuación de la recta normal a la función $f$, en el punto (2,1,1)

De la ecuación de la recta normal se deprende que el vector normal a la función $f$, en el punto (2,1,1) es

$$\boxed{\boldsymbol{n}=\begin{bmatrix}3\\7\\-1\end{bmatrix}}$$

Para admitir plano tangente, la función $z=f(x,y)$ debe ser diferenciable.

---

***21.*** *Encuentre la ecuación del plano tangente y de la recta normal a la superficie de ecuación $xy+yz+zx=11$ en el punto (1,2,3).*

***Solución.***

Determinemos la función $z=f(x,y)$,

$$xy+yz+zx=11 \quad\rightarrow\quad yz+zx=11-xy \quad\rightarrow\quad z(y+x)=11-xy$$

$$\rightarrow\quad z=\frac{11-xy}{y+x}=f(x,y)$$

Calculemos las derivadas parciales

$$f_x(x,y)=\frac{-y(y+x)-(11-xy)}{(y+x)^2} \quad\rightarrow\quad f_x(1,2)=-\frac{5}{3}$$

$$f_y(x,y)=\frac{-x(y+x)-(11-xy)}{(y+x)^2} \quad\rightarrow\quad f_y(1,2)=-\frac{4}{3}$$

Ecuación del plano tangente, $z-z_0=f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$.

$$z-3=-\frac{5}{3}\cdot(x-1)+\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot(y-2)$$

$$z-3=-\frac{5}{3}x-\frac{4}{3}y+\frac{13}{3}$$

$$\boxed{\frac{5}{3}x+\frac{4}{3}y+z-\frac{22}{3}=0}$$

Plano tangente

Ecuación de la recta normal, $\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$.

$$\boxed{\frac{x-1}{-\frac{5}{3}}=\frac{y-2}{-\frac{4}{3}}=\frac{z-3}{-1}}$$

Recta normal