UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN JUAN

FACULTAD DE INGENIERÍA

Departamento de Matemática

ANÁLISIS MATEMÁTICO II - CÁLCULO II

Ing. en Agrimensura - Ing. Civil - Ing. de Minas - Ing. en Metalurgia Extractiva

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Equipo de cátedra

Mg. Ing. Pablo G. Marcuzzi Naveda
Mg. Lic. Alejandra Garcés
Dra. Ing. Cecilia Fernández
Dra. Ing. Celia Román

Año 2022

Índice

1. Introducción

Una gran variedad de fenómenos físicos, químicos, biológicos, económicos, entre otras disciplinas, pueden ser modelados a través de ecuaciones diferenciales. Algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales son:

Ejemplo 1.1. La segunda ley de Newton, cuya expresión escalar resulta:

$$F(t) = ma(t) \Rightarrow F(t) = m\,\frac{d^2x(t)}{dt^2},$$

siendo $F(t)$ la fuerza experimentada por un objeto de masa m sometido a una aceleración $a(t)$. Por otro lado, se sabe que $a(t) = d^2x(t)/dt^2$. Es decir, la aceleración es igual a la derivada segunda de los desplazamientos $x(t)$ con respecto al tiempo.

Ejemplo 1.2. Los desplazamientos normales al plano medio de una placa simplemente apoyada en sus vértices pueden encontrarse resolviendo la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4} = \frac{q}{D},$$

siendo $w(x,y)$ los desplazamientos en dirección perpendicular al plano medio de la placa; x, y las variables independientes; q la carga aplicada por unidad de área; y D constante elástica que depende del tipo de material y espesor de la placa (vea la Figura 1.1).

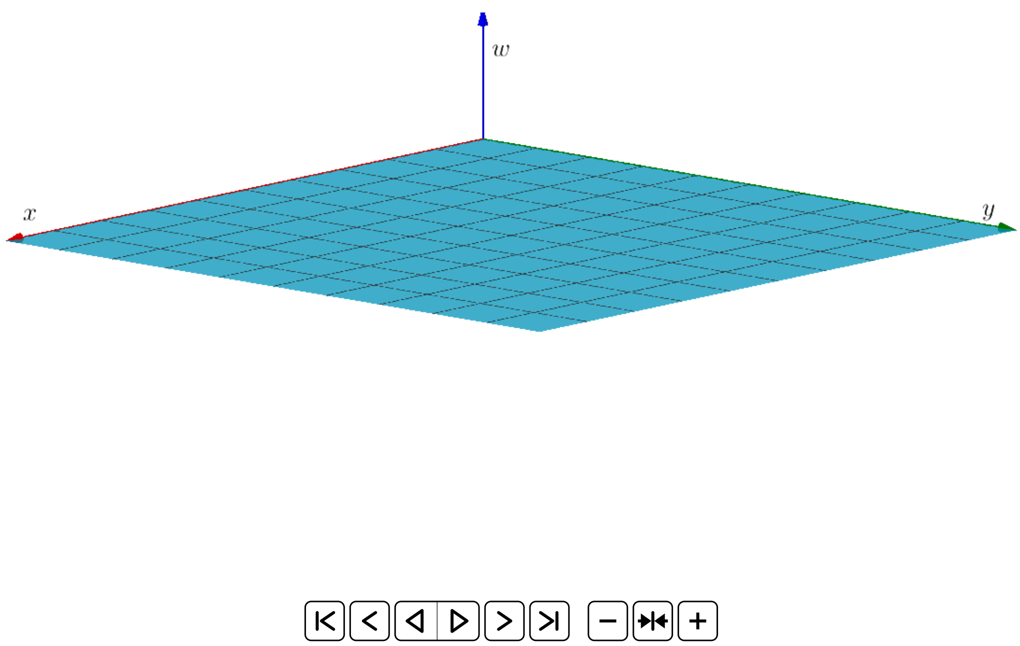

Figura 1.1: Flexión en placas

Ejemplo 1.3. El vaciado de un tanque de agua cilíndrico cuyo radio es igual a 1 m, posee un orificio circular de 0.02 m de diámetro y contiene agua hasta una altura de

0.5 m responde a la ecuación diferencial:

$$\frac{dV(t)}{dt} = -kA_o v(t),$$

siendo $V(t)$ el volumen de agua contenido en el tanque (que será variable con el tiempo, pues se está vaciando el tanque); t el tiempo, como variable independiente; k una constante de proporcionalidad que es función de la forma del orificio del fondo; A_o es el área del orificio del fondo; y $v(t)$ es la velocidad con la que el agua pasa a través del orificio.

En los ejemplos expuestos, puede observarse que hay intervención de derivadas. En algunos casos, hay derivadas que dependen de dos variables independientes (parciales), mientras que en otros dependen solamente de una variable independiente.

Otro punto a notar es el orden de derivación que hay en las ecuaciones, pasando de uno a cuatro. Debido a estas diferencias, y para formalizar el concepto, se darán algunas definiciones.

1.1. Definiciones

Definición 1.1. Una ecuación diferencial es aquella que contiene **derivadas o diferenciales**, es decir, una relación entre **variables independientes, funciones de estas variables y sus derivadas de cualquier orden**.

A diferencia de una ecuación algebraica, la **resolución** de una Ecuación Diferencial implica **hallar una función** que la satisfaga (es decir, la incógnita de una ecuación diferencial es una función).

Definición 1.2. Se define como **orden** de una ecuación diferencial al **mayor número de veces** (esto es, orden de derivación) **que se encuentra derivada la función incógnita**.

Ejemplos:

$$F\left[x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}\right] = 0 \quad \text{Es de Primer Orden}$$

$$G\left[x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \frac{d^2y(x)}{dx^2}\right] = 0 \quad \text{Es de Segundo Orden}$$

$$H\left[x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \frac{d^2y(x)}{dx^2}, ..., \frac{d^ny(x)}{dx^n}\right] = 0 \quad \text{Es de Orden n}$$

Definición 1.3. Se define como **grado** de una ecuación diferencial al **exponente** que se encuentra elevado el **término que contiene a la derivada de mayor orden** una vez que la ecuación ha sido racionalizada y no posee denominadores.

Ejemplos:

$$F\left[x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}\right] = 0 \quad \text{Es de Primer Grado}$$

$$G\left[x, y(x), \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2, \left(\frac{d^2y(x)}{dx^2}\right)^5\right] = 0 \quad \text{Es de Grado 5}$$

$$H\left[x, y(x), \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^8, \left(\frac{d^2y(x)}{dx^2}\right)^5, ..., \left(\frac{d^ny(x)}{dx^n}\right)^3\right] = 0 \text{ Es de Grado 3}$$

1.2. Clasificación de las ecuaciones diferenciales

Existen varios criterios para clasificar a las ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, de acuerdo a la **cantidad de variables independientes** que posea la función incógnita, pueden clasificarse en:

- **Ordinarias**, cuando tenga **una sola** variable independiente (Ejemplos 1.1 y 1.3)
- **Parciales**, cuando tenga **dos o más** variables independientes (Ejemplo 1.2)

Según como se presenten, pueden clasificarse en **implícitas** si la expresión se encuentra igualada a 0 o **explícitas** si la derivada de mayor orden se encuentra despejada.

Ejemplo de ecuación diferencial dada en forma implícita:

$$F\left[x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \frac{d^2y(x)}{dx^2}, ..., \frac{d^ny(x)}{dx^n}\right] = 0$$

Ejemplo de ecuación diferencial en forma explícita:

$$\frac{d^ny(x)}{dx^n} = G\left[x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \frac{d^2y(x)}{dx^2}, ..., \frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}}\right]$$

También pueden clasificarse en función del orden y del grado. En este curso se trabajará solamente con las ecuaciones de grado 1 (lineales).

2. Resolución de Ecuaciones Diferenciales

Resolver una ecuación diferencial, ya sea ordinaria o parcial, de cualquier orden, implica encontrar una función de la o las variables independientes que la satisfagan. El proceso de resolución implica **integrar** la ecuación diferencial el mismo número de veces que el orden de dicha ecuación.

Debido a que se realiza una integración sin límites (integral indefinida), se encuentran **funciones primitivas**, las cuales poseen **constantes de integración indeterminadas**. La cantidad de constantes de integración será igual al orden de la ecuación diferencial.

Ejemplo 2.1. Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = 2x$$

Se sabe que la variable independiente es x, mientras que la dependiente es y. Además:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Reemplazando en la expresión anterior:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \rightarrow dy = 2x\ dx$$

Integrando miembro a miembro:

$$\int dy = \int 2x\ dx$$

Se obtiene:

$$y = x^2 + C$$

La cual es **solución general** de la ecuación diferencial.

Verificación

Derivando con respecto a x la solución general:

$$y' = 2x$$

Se obtiene la ecuación diferencial del comienzo.

3. Resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden y Primer Grado

Resolver una **Ecuación Diferencial** (en este caso ordinaria, de primer orden y primer grado) implica encontrar **todas** las funciones explícitas del tipo $y = f(x, C)$ o implícitas $G(x, y, C) = 0$ que la verifican, siendo C una constante de integración arbitraria.

Por esta razón a la solución obtenida se la denomina **Solución General de la Ecuación Diferencial Ordinaria** (EDO) y representa una **familia de funciones** (Figura 3.1).

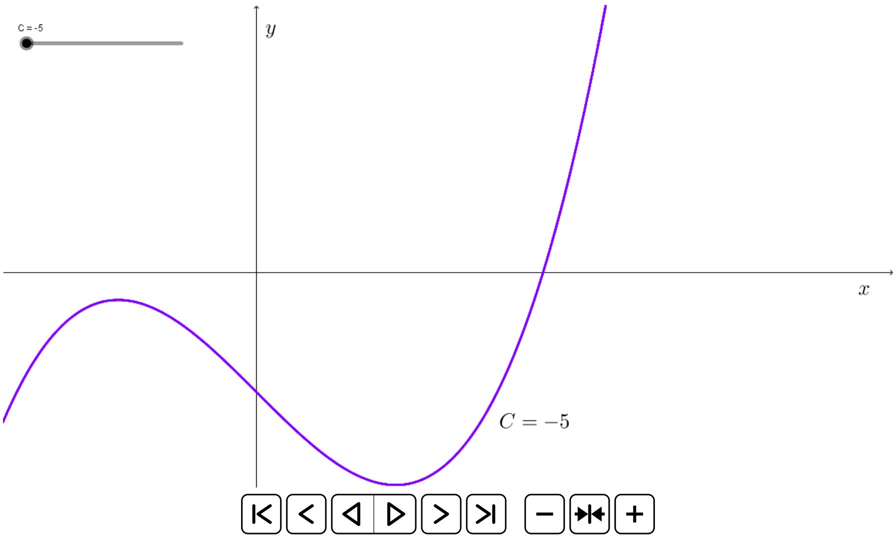

Figura 3.1: Solución general de una EDO (familia de funciones)

Por otro lado, si se consideran **valores iniciales** en el problema, como por ejemplo:

$$\begin{cases} y = f(x, C) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

El valor de C puede determinarse y la solución hallada se denomina **Solución Particular de la EDO** y representa **una sola curva de la familia de funciones** (Figura 3.2).

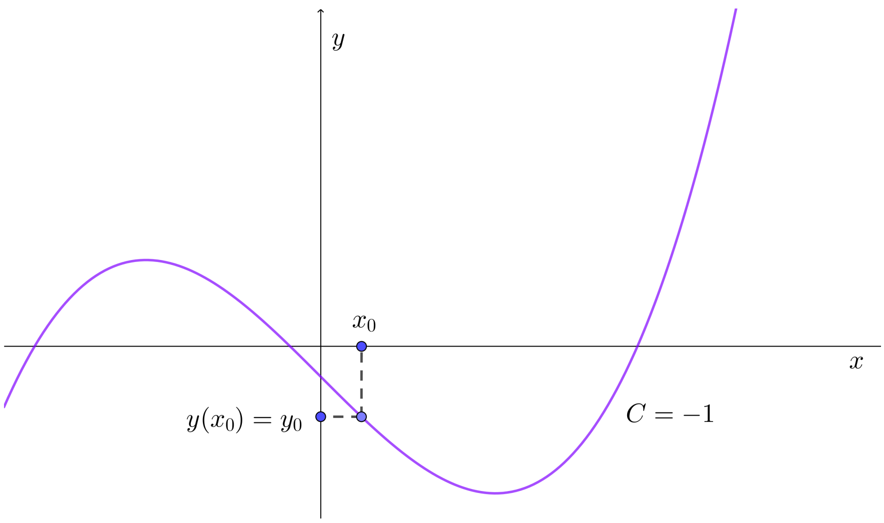

Figura 3.2: Solución particular de una EDO

3.1. Método de Separación de Variables

Este es el primer método que a una persona puede ocurrírsele intuitivamente. Consiste en agrupar las variables en diferentes términos (sin que se encuentren mezcladas) y luego integrar dichos términos con respecto a la variable que corresponda. Por ejemplo, resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y(1-x)dx + x^2(1-y)dy = 0$$

Dividiendo toda la expresión por x^2y:

$$\frac{y(1-x)}{x^2y}dx + \frac{x^2(1-y)}{x^2y}dy = \frac{0}{x^2y}$$

Resulta:

$$\underbrace{\frac{(1-x)dx}{x^2}}_{\text{corresponde a } x} + \underbrace{\frac{(1-y)dy}{y}}_{\text{corresponde a } y} = 0$$

Operando:

$$\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)dx + \left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = 0$$

Integrando:

$$\int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)dx + \int \left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = \int 0$$

$$\frac{-1}{x} - \ln(x) + \ln(y) - y = C \rightarrow \frac{-1}{x} - \ln(x) + \ln(y) - y - C = 0$$

Que es la **solución general** (dada en forma implícita) de la ecuación diferencial. Cabe destacar que esta metodología de resolución es limitada, ya que existirán casos en los que no se pueda separar las variables de manera tan sencilla. Por esta razón, se verá el siguiente método de resolución para ecuaciones de primer grado (lineales) y primer orden.

3.2. Ecuaciones diferenciales lineales

Una ecuación diferencial lineal de primer orden es aquella que tiene la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Donde $y(x)$ es la función incógnita; x la variable independiente; $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones de la variable independiente conocidas.

Para hallar una expresión que resuelva una ecuación de este tipo, se encontrará la expresión de una función $u(x)$ denominada factor integrante. Para ello, se multiplica ambos lados de la ecuación diferencial por la función $u(x)$:

$$\frac{dy}{dx}u(x) + P(x)yu(x) = u(x)Q(x)$$

Recordando la expresión de la derivada del producto de dos funciones $y(x)u(x)$:

$$\frac{d(uy)}{dx} = \frac{du}{dx}y + \frac{dy}{dx}u$$

Comparando la derivada del producto con el primer miembro de la ecuación diferencial multiplicada por $u(x)$ se tiene:

$$\frac{du}{dx} = P(x)u$$

Separando variables e integrando:

$$\int \frac{du}{u} = \int P(x)dx$$

$$\ln u = \int P(x)dx + C \to u = Ae^{\int P(x)dx}$$

Siendo $A = e^C$. Para el caso particular en que $C = 0$, $A = 1$, y por lo tanto:

$$u = e^{\int P(x)dx}$$

Esta solución particular se denomina **factor integrante de la ecuación lineal**.

Volviendo a la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx}u(x) + \underbrace{P(x)u(x)}_{\dfrac{du}{dx}}y = u(x)Q(x)$$

Por lo que, el lado izquierdo es la derivada del producto de funciones y u. Por lo tanto, se puede escribir:

$$\frac{d(y\ u)}{dx} = u(x)Q(x)$$

Multiplicando por dx e integrando a ambos lados de la igualdad, resulta:

$$y\ u = \int u(x)Q(x)dx + C$$

Despejando la función y, y recordando la expresión del factor integrante $u = e^{\int P(x)dx}$:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + C\right]$$

Por lo tanto, para hallar la solución general de una ecuación diferencial de primer orden y primer grado (lineal) de la forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Debe emplearse la expresión:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + C\right]$$

3.3. Aplicaciones de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

Se verán algunas aplicaciones de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y grado.

3.3.1. Problemas geométricos

Encuentre la ecuación de la familia de curvas $y = f(x)$ tal que su pendiente, en cualquier punto, sea igual a la suma de la ordenada y el doble de la abscisa del punto.

La ecuación diferencial que describe el problema es:

$$y' = y + 2x \rightarrow \frac{dy}{dx} - y = 2x$$

La cual claramente responde a una ecuación diferencial de primer orden lineal, del tipo:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

La expresión para hallar la función en este tipo de ecuaciones diferenciales es:

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \left[\int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + C \right]$$

Primero se encontrará la expresión del factor integrante, esto es:

$$u(x) = e^{\int P(x)\ dx} = e^{\int -1\ dx} = e^{-x}$$

Reemplazando los demás valores:

$$y(x) = e^{x} \left[\underbrace{\int e^{-x}\ 2x\ dx}_{\text{Debe resolverse por partes}} + C \right]$$

Recordando como se resolvía una integral por partes:

$$\int u\ dv = uv - \int v\ du$$

Para este caso:

$$u = 2x$$

$$dv = e^{-x}\ dx$$

Resolviendo la integral por partes:

$$y(x) = e^{x} \left[-2e^{-x}(x+1) + C \right]$$

La solución general de la ecuación diferencial es:

$$y(x) = Ce^{x} - 2(x+1)$$

Se busca la solución que pase por el punto $(1, 1)$:

$$1 = Ce^1 - 2(1 + 1) \rightarrow C = \frac{5}{e}$$

La solución particular resulta (vea la Figura 3.3):

$$y(x) = \frac{5}{e}e^x - 2(x + 1)$$

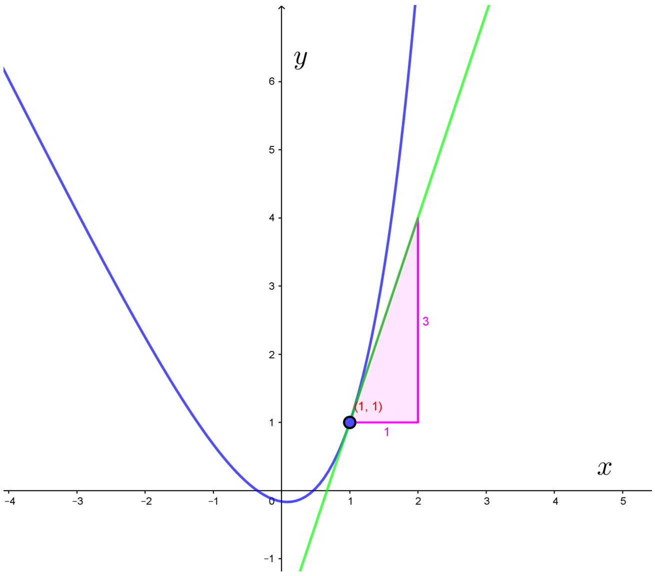

Figura 3.3: Problema geométrico

3.3.2. Problemas de crecimiento/decrecimiento

Cuando se produce cierto alimento, se estima en N_0 la cantidad de organismos presentes en un paquete. Al cabo de 60 días, el número N ha aumentado a 1000 N_0, sin embargo el número 200 N_0 es considerado como límite saludable. ¿A los cuántos días después de elaborado el paquete vence el producto? Vea la Figura 3.4.

La ecuación diferencial que gobierna los fenómenos de crecimiento en el tiempo es:

$$\frac{dN}{dt} = k\ N$$

Siendo k una constante de proporcionalidad

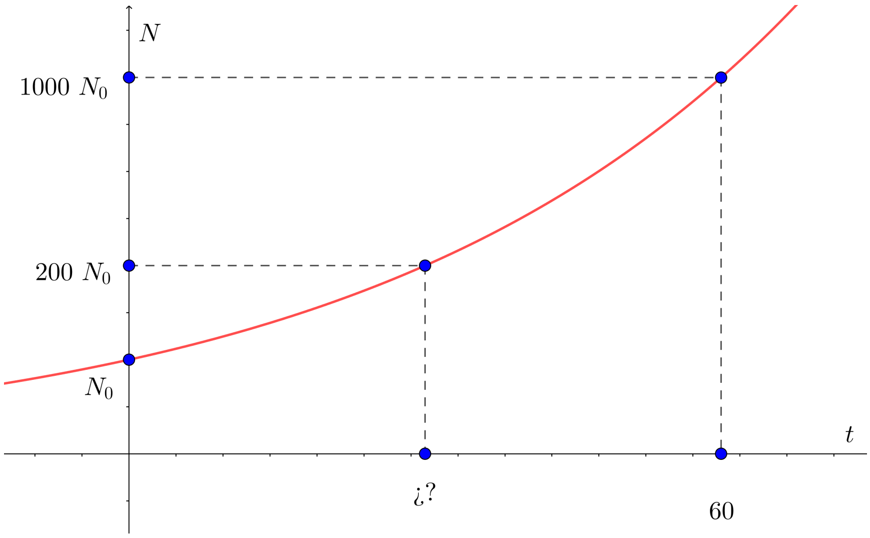

Figura 3.4: Crecimiento de bacterias

La resolución de la ecuación diferencial se hace mediante variables separables:

$$\int \frac{dN}{N} = \int k\ dt$$

Integrando:

$$\ln N = k\ t + C$$

Despejando N:

$$N = e^{k\ t+C} = e^{kt}\ \underbrace{e^{C}}_{C}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial planteada es:

$$N = C\ e^{kt}$$

Para resolver el problema, deben determinarse los valores de C y k, para ello son necesarias dos condiciones:

- $t = 0$, $N = N_0$ (Cuando se produce el alimento, la cantidad inicial de organismos es N_0)
- $t = 60$, $N = 1000\ N_0$

Se plantea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} N_0 = Ce^{k\ 0} \\ 1000\ N_0 = Ce^{k\ 60} \end{cases}$$

De donde se obtiene fácilmente que $C = N_0$. Por otra parte, despejando k:

$$k = \frac{\ln 1000}{60} \approx 0.115$$

Por lo tanto, la solución particular de la ecuación diferencial resulta:

$$N = N_0\ e^{\frac{\ln 1000}{60}t}$$

Para responder a la pregunta del problema, se coloca una población de 200 N_0 y se despeja el tiempo:

$$200\ N_0 = N_0\ e^{\frac{\ln 1000}{60}\ t} \rightarrow t = 60\frac{\ln 200}{\ln 1000} \approx 46.02 \text{ dias}$$

3.3.3. Trayectorias Ortogonales

Este problema consiste en encontrar una familia de curvas ortogonales a la familia dada. Esto significa que en cada punto las tangentes a cada familia deben formar un ángulo de 90° entre ellas.

Esa condición se logra sabiendo que la relación entre pendientes de rectas ortogonales entre sí es:

$$m_1\ m_2 = -1$$

Siendo m_1 las pendientes de las tangentes a la familia dada; y m_2 las pendientes de las tangentes a la familia ortogonal.

El ejercicio consiste en encontrar la familia de trayectorias ortogonales a $y = 1 + Ce^{4x}$.

Lo primero que debe hacerse es encontrar la ecuación diferencial que tiene por solución general a la familia dada.

Para ello se deriva la solución general con respecto a la variable independiente (que en este caso es x):

$$y' = 4Ce^{4x}$$

Debe eliminarse la constante de integración, puesto que **una ecuación diferencial no puede contener constantes arbitrarias**. Para ello, se despeja de la derivada:

$$C = \frac{y'}{4e^{4x}}$$

y se reemplaza en la expresión de la familia de curvas:

$$y = 1 + \frac{y'}{4e^{4x}}e^{4x} = 1 + \frac{y'}{4}$$

$$y = 1 + \frac{y'}{4}$$

De esta expresión se despeja y':

$$y' = 4(y-1) = 4y - 4$$

Aplicando la condición de ortogonalidad entre pendientes:

$$y'_{\perp} = -\frac{1}{4y-4}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4y-4}$$

Lo que resulta en una ecuación diferencial de variables separables.

$$(4y-4)dy = -dx$$

$$\int (4y-4)dy = \int -dx$$

Integrando:

$$2y^2 - 4y = -x + D$$

Completando cuadrados y operando:

$$y = \pm\sqrt{1 - \frac{x}{2} + D} + 1$$

se obtiene la **solución general** de la ecuación diferencial, que en este caso corresponde a la familia ortogonal.

Si se buscan las curvas que pasan por el punto $(1, 2)$ (solución particular):

- Para la familia dada:

  $$2 = 1 + Ce^{4\ 1} \rightarrow C = \frac{1}{e^4}$$

  La solución particular de la familia dada resulta:

  $$y = 1 + \frac{1}{e^4}e^{4x}$$

- Para la familia ortogonal:

  $$2 = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{2} + D} + 1 \rightarrow D = \frac{1}{2}$$

  La solución particular de la familia ortogonal resulta:

  $$y = \pm\sqrt{\frac{3}{2} - \frac{x}{2}} + 1$$

Ambas curvas se muestran la Figura 3.5.

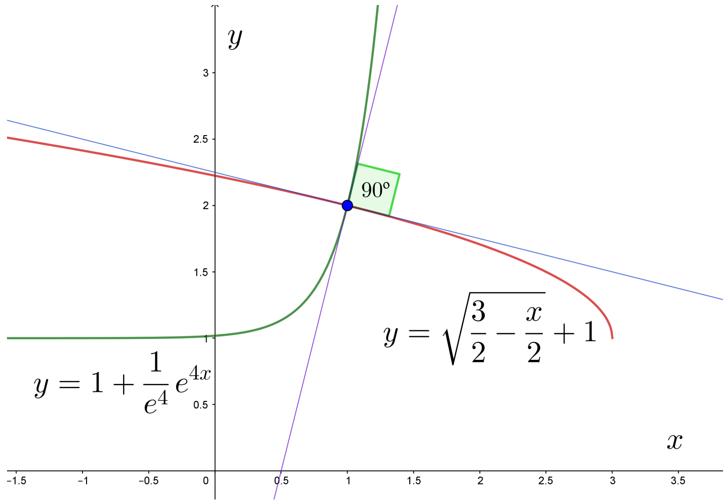

Figura 3.5: Trayectorias ortogonales

3.3.4. Tiempo de vaciado de un tanque

Un tanque cilíndrico contiene agua hasta una altura de 0.5 m desde el fondo. El tanque posee un orificio circular $\phi = 0.02$ m de diámetro en el fondo. El radio del tanque vale $R = 1$ m. La velocidad del agua que sale por el orificio del fondo está dada por $v = \sqrt{2gy}$, donde g vale 9.81 m/s^2 y y es la altura del agua sobre el orificio. Averigüe en cuantos minutos se vacía el tanque.

Tenga en cuenta que la tasa de cambio del volumen de agua es proporcional al área del orificio y a la velocidad. Considere una constante para orificios circulares $k = 0.6$.

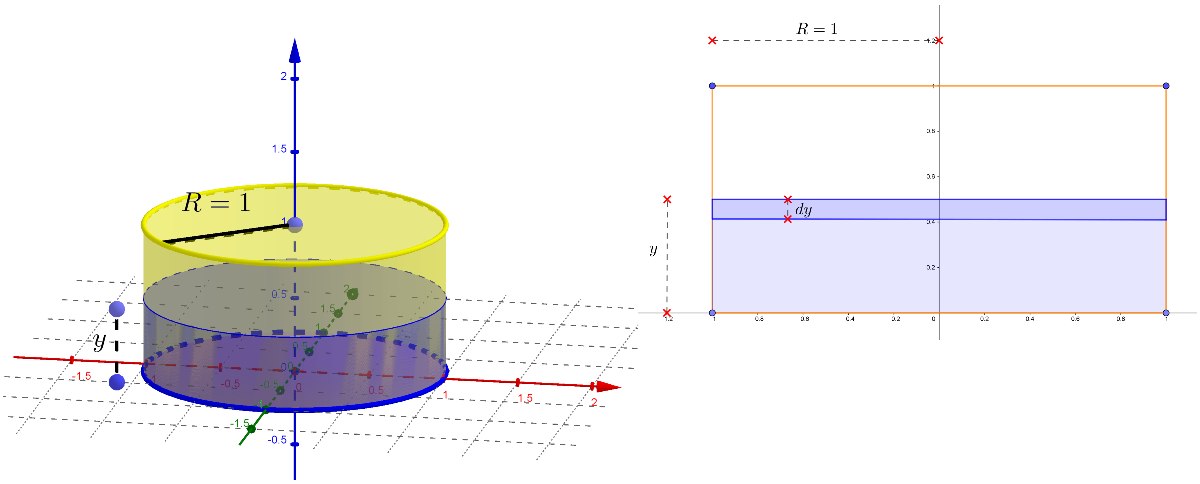

Figura 3.6: Vaciado de un tanque con agua

Observando la Figura 3.6 es claro que un diferencial de volumen de agua puede calcularse como:

$$dV = \pi R^2 \, dy$$

Además, según el enunciado, se cumplía la igualdad:

$$\frac{dV}{dt} = -kA_0 \ v$$

Siendo A_0 el área del orificio del fondo, cuya expresión es:

$$A_0 = \pi \frac{\phi^2}{4}$$

Reemplazando dV y A_0 en la ecuación principal:

$$\pi R^2 \frac{dy}{dt} = -k\pi \frac{\phi^2}{4}\sqrt{2gy}$$

Operando y separando variables:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{-k}{R^2}\frac{\phi^2}{4}\sqrt{2g} \ dt$$

Integrando:

$$2\sqrt{y} = \frac{-k}{R^2}\frac{\phi^2}{4}\sqrt{2g} \ t + C$$

La condición inicial es $y(0) = 0.5$, lo que arroja $C = \sqrt{2}$

Para saber el tiempo en el que se vacía el tanque, debe hacerse $y = 0$, reemplazar todos los datos del problema y despejar t:

$$t_v = \frac{4R^2}{k\phi^2\sqrt{g}}$$

Con los datos proporcionados, el tiempo de vaciado del tanque resulta:

$$t_v = \frac{4R^2}{k\phi^2\sqrt{g}} = \frac{4 \ (1 \ \mathrm{m})^2}{0.6 \ (0.02 \ \mathrm{m})^2\sqrt{9.81 \ \mathrm{m/s^2}}} = 5321.3 \ \mathrm{seg} \approx 88 \ \mathrm{min}$$

4. Ecuaciones diferenciales de orden n

Una ecuación diferencial de orden n puede escribirse en forma implícita como:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^n) = 0$$

O en forma explícita:

$$y^n = f(x, y, y', y'', ..., y^{n-1})$$

Se denomina **solución general** de una ecuación diferencial de orden n a la expresión:

$$y = g(x, C_1, C_2, ..., C_n)$$

tal que satisfaga a la ecuación diferencial cualesquiera sean los valores de las n constantes arbitrarias.

Si existen condiciones iniciales del tipo:

$$\begin{gathered} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ y''(x_0) = y''_0 \\ \vdots \\ y^{n-1}(x_0) = y_0^{n-1} \end{gathered}$$

Las constantes arbitrarias C_i pueden ser determinadas, constituyendo de esta manera una **solución particular** de la ecuación diferencial.

5. Ecuaciones diferenciales lineales de orden n

Si el grado de una ecuación diferencial de orden n es uno, se estará en presencia de una ecuación diferencial **lineal** de orden n, la cual tiene como expresión genérica:

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n \ y = Q(x)$$

con $a_0 \neq 0$ (para evitar puntos singulares de la ecuación).

Se considerará que los coeficientes que acompañan a las derivadas son constantes y en particular que $a_0 = 1$. Para forzar esto, se dividen ambos miembros por a_0, resultando:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n \ y = Q(x)$$

Se define un operador D de la siguiente manera:

$$D = \frac{d}{dx}$$

Por lo que la ecuación diferencial puede escribirse como:

$$D^n \ y + a_1 \ D^{n-1} \ y + ... + a_{n-1} \ D \ y + a_n \ y = Q(x)$$

Sacando factor común a la función incógnita y:

$$\underbrace{\left[D^n + a_1 \ D^{n-1} + ... + a_{n-1} \ D + a_n \right]}_{L(D)} y = Q(x)$$

La ecuación diferencial puede escribirse en forma compacta como:

$$L(D)y = Q(x)$$

El operador $L(D)$ es un **operador lineal** y cumple con las siguientes propiedades:

- $L(D)(u + v) = L(D)u + L(D)v$, con u y v funciones de la variable independiente.
- $L(D)(C \ u) = C \ L(D)u$, siendo C una constante arbitraria.

5.1. Teorema Fundamental para la resolución de Ecuaciones diferenciales lineales de orden n

Teorema 5.1. *Si $y = u(x)$ es una solución particular de la ecuación $L(D)y = Q(x)$ y $y = v(x)$ es* **solución general** *de $L(D)y = 0$, entonces $y = u(x) + v(x)$ es solución general de $L(D)y = Q(x)$.*

Demostración

Por hipótesis, se tiene:

$$L(D)u(x) = Q(x)$$

$$L(D)v(x) = 0$$

Se debe probar que la suma de $u(x)$ y $v(x)$ es también una solución general de la ecuación no homogénea (o completa):

$$L(D)(u+v) = \underbrace{L(D)u(x) + L(D)v(x)}_{\text{Por ser } L(D) \text{ un operador lineal}}$$

$$L(D)(u+v) = \underbrace{Q(x) + 0}_{\text{Por hipótesis}}$$

Finalmente:

$$L(D)(u+v) = Q(x)$$

Esto indica que $y(x)$ formada a partir de la suma entre una solución general homogénea, $v(x)$ y una particular de la ecuación completa, $u(x)$, es solución general de la ecuación diferencial completa.

5.2. Solución General de la Ecuación Homogénea

Sea la ecuación diferencial lineal **homogénea** de orden n:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n\ y = 0$$

Se plantea la siguiente sustitución:

$$y = e^{rx}$$

Cuya derivada i-ésima es:

$$y^{(i)} = r^i e^{rx} \ \ \text{con } i = 1, 2, ..., n$$

Reemplazando las derivadas en la ecuación diferencial:

$$r^n e^{rx} + a_1\ r^{n-1} e^{rx} + ... + a_{n-1} r e^{rx} + a_n\ e^{rx} = 0$$

Sacando factor común e^{rx}:

$$e^{rx}\left(r^n + a_1\ r^{n-1} + ... + a_{n-1}\ r + a_n\right) = 0$$

Se define como **ecuación característica** a la expresión:

$$r^n + a_1\ r^{n-1} + ... + a_{n-1}\ r + a_n = 0$$

Dependiendo de las raíces de la ecuación característica se tendrán diferentes soluciones generales para la ecuación diferencial homogénea.

5.2.1. Raíces reales y distintas

Si las raíces de la **Ecuación Característica** son del tipo:

$$r_1 \neq r_2 \neq ... \neq r_n \quad \text{con } r_i \in \mathbb{R}$$

Se ensaya como solución general de la ecuación homogénea

$$v(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + ... + C_n e^{r_n x}$$

O escrita en forma compacta:

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{r_i x}$$

Para que esto sea válido, las funciones $e^{r_i x}$ deben ser **linealmente independientes**. Es decir esta expresión:

$$C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + ... + C_n e^{r_n x} = 0$$

se verifica si y solo si las constantes C_i con $i = 1,\ 2, ..., n$ son iguales a cero.

Esta condición puede comprobarse calculando el determinante de Wronski o Wronskiano, el cual se define a continuación:

Definición 5.1. Sean $f_1,\ f_2,\ ...,\ f_n$ un conjunto de n funciones, las cuales son $(n-1)$ veces derivables, el wronskiano $W(f_1, f_2, ..., f_n)$ está dado por:

$$W(f_1, f_2, ..., f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ \dfrac{df_1}{dx} & \dfrac{df_2}{dx} & \cdots & \dfrac{df_n}{dx} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{d^{(n-1)} f_1}{dx^{(n-1)}} & \dfrac{d^{(n-1)} f_2}{dx^{(n-1)}} & \cdots & \dfrac{d^{(n-1)} f_n}{dx^{(n-1)}} \end{vmatrix}$$

Si el Wronskiano es distinto de cero, las funciones f_i con $i = 1,\ 2, ..., n$ serán linealmente independientes. Por el contrario, si es igual a cero se está en presencia de funciones linealmente dependientes.

Las funciones a analizar en este caso son las

$$\left.\begin{aligned} f_i &= e^{r_i x} \\ \frac{df_i}{dx} &= r_i e^{r_i x} \\ &\vdots \\ \frac{d^{(n-1)} f_i}{dx} &= r_i^{(n-1)} e^{r_i x} \end{aligned}\right. \qquad \text{con } i = 1,\ 2, ..., n$$

Por lo tanto, el Wronskiano resulta:

$$W = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & \cdots & e^{r_n x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & \cdots & r_n e^{r_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} e^{r_1 x} & r_2^{n-1} e^{r_2 x} & \cdots & r_n^{n-1} e^{r_n x} \end{vmatrix} = \underbrace{e^{r_1 x} e^{r_2 x} ... e^{r_n x}}_{\neq 0} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}}_{\text{det. de Vandermonde}}$$

El determinante de Vandermonde se calcula como:

$$\det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (r_j - r_i)$$

Es decir:

$$\det(V) = (r_1 - r_2)(r_1 - r_3)...(r_1 - r_n)(r_2 - r_3)...(r_2 - r_n)...(r_{n-1} - r_n)$$

Como todas las raíces son reales y distintas ningún término de los paréntesis se anula, por lo tanto se demuestra que las funciones $e^{r_i x}$ y sus derivadas hasta el orden $(n-1)$ son linealmente independientes.

5.2.2. Raíces reales y coincidentes

Se hallará la solución para una ecuación diferencial de segundo orden con raíces reales coincidentes y luego se generalizará para n raíces reales coincidentes. Es evidente que la combinación lineal de soluciones propuesta para el caso anterior no funcionaría aquí ya que las raíces de la ecuación característica son iguales (y el determinante de Vandermonde sería igual a cero).

Sea la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0$$

y las raíces de la ecuación característica asociada $r_1 = r_2 = r = -a_1/2$. Se plantea una solución $v = u\ e^{rx}$, siendo $u = u(x)$ una función a determinar.

Se calculan las derivadas de la solución propuesta:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{du}{dx} e^{rx} + u\ re^{rx}$$
$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2} e^{rx} + 2\frac{du}{dx}\ re^{rx} + u\ r^2 e^{rx}$$

Al ser $v = ue^{rx}$ solución de la ecuación diferencial, significa que la satisface:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + a_1\frac{dv}{dx} + a_2 v = 0 \rightarrow \underbrace{\frac{d^2u}{dx^2} e^{rx} + 2\frac{du}{dx}\ re^{rx} + u\ r^2 e^{rx}}_{\frac{d^2v}{dx^2}} + a_1 \underbrace{\left(\frac{du}{dx} e^{rx} + u\ re^{rx}\right)}_{\frac{dv}{dx}} + a_2 \underbrace{u\ e^{rx}}_{v} = 0$$

Operando:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx}(2r + a_1) + u\left(r^2 + a_1 r + a_2\right) = 0$$

Como $r = -a_1/2$, y por consiguiente $a_2 = a_1^2/4$ se tiene:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx}\underbrace{(2r + a_1)}_{0} + u\underbrace{\left(r^2 + a_1 r + a_2\right)}_{0} = 0$$

Por lo tanto:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0$$

Para conocer la función $u = u(x)$ se integra dos veces con respecto a x:

$$\int \frac{d^2u}{dx^2} dx = \int 0\ dx \rightarrow \frac{du}{dx} = C_1$$

$$\int \frac{du}{dx} dx = \int C_1\ dx \rightarrow u = C_1 x + C_2$$

La solución general de la ecuación homogénea con dos raíces reales y coincidentes resulta:

$$v = u\ e^{rx} = (C_1 x + C_2)\, e^{rx}$$

Puede demostrarse que las soluciones xe^{rx} y e^{rx} son linealmente independientes.

Cuando hay n raíces reales coincidentes:

$$r_1 = r_2 = ... = r_n = r \quad \text{con } r_i \in \mathbb{R}$$

Se ensaya como solución general de la ecuación homogénea

$$v(x) = e^{rx}\left(C_n x^{n-1} + C_{n-1} x^{n-2} + ... + C_1\right)$$

O escrita en forma compacta:

$$v(x) = e^{rx} \sum_{i=1}^{n} C_i x^{i-1}$$

5.2.3. Raíces complejas conjugadas

La solución general de la ecuación diferencial homogénea en el caso de tener raíces complejas conjugadas, se verá para una ecuación diferencial de segundo orden.

Si las raíces de la **Ecuación Característica** son del tipo:

$$r_1 = a + bi \ y \ r_2 = a - bi \quad \text{con } r_1 \ y \ r_2 \in \mathbb{C}$$

Se ensaya como solución general de la ecuación homogénea

$$v(x) = C_1 \ e^{r_1 x} + C_2 \ e^{r_2 x} \rightarrow C_1 \ e^{(a+bi)x} + C_2 \ e^{(a-bi)x}$$

Esto es:

$$v(x) = C_1 \ \left(e^{ax} e^{ibx}\right) + C_2 \left(e^{ax} e^{-bix}\right)$$

Aplicando la fórmula de Moivre juntamente con la de Euler se tiene:

$$e^{ibx} = \cos(bx) + i \operatorname{sen}(bx)$$

$$e^{-ibx} = \cos(bx) - i \operatorname{sen}(bx)$$

Reemplazando en la expresión de $v(x)$:

$$v(x) = C_1 \ \{e^{ax} [\cos(bx) + i \operatorname{sen}(bx)]\} + C_2 \{e^{ax} [\cos(bx) - i \operatorname{sen}(bx)]\}$$

Operando:

$$v(x) = e^{ax} \left[\underbrace{(C_1 + C_2)}_{\hat{C}_1} \cos(bx) + \underbrace{i \, (C_1 - C_2)}_{\hat{C}_2} \operatorname{sen}(bx) \right]$$

En definitiva, la solución general de la ecuación homogénea para el caso en que las raíces de la ecuación característica sean complejas conjugadas es:

$$v(x) = e^{ax} \left[\hat{C}_1 \cos(bx) + \hat{C}_2 \operatorname{sen}(bx)\right] = e^{ax} \left[C_1 \cos(bx) + C_2 \operatorname{sen}(bx)\right]$$

5.3. Método de los Coeficientes Indeterminados

Como se vió en el **Teorema 5.1**, para encontrar una solución general de una ecuación diferencial lineal de orden n del tipo:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n \ y = Q(x)$$

era necesario **hallar** y **sumar** dos soluciones: una **solución general homogénea** y otra **particular**.

Para encontrar esta última se utiliza el **Método de los Coeficientes Indeterminados**.

Este método se encuentra limitado a las formas que puede llegar a presentar el término $Q(x)$. Así, admite cuatro variantes:

- $Q(x)$ es un polinomio de grado m
- $Q(x)$ es una función del tipo exponencial.
- $Q(x)$ es una función trigonométrica.
- $Q(x)$ es una combinación de las anteriores.

Como su nombre lo indica, el método consiste en plantear una **solución particular de la ecuación diferencial completa** con coeficientes a determinar. La forma de la solución dependerá de la naturaleza de $Q(x)$. Por ello, se presentan cuatro casos:

5.3.1. Si $Q(x)$ es un polinomio de grado m

Si $Q(x)$ es un polinomio de la forma $P(x) = p_m x^m + p_{m-1}x^{m-1} + ... + p_1 x + p_0$

Se debe tener en cuenta si el cero (0) es raíz o no de la ecuación característica. Si $r = 0$ no es raíz de la ecuación característica, se ensaya como solución particular un polinomio **completo** y **del mismo orden de** $Q(x)$ con coeficientes a_i con $i = 0, 1, 2, ..., m$, a determinar:

$$u(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0$$

Ejemplo 5.1.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + y = 3x^3 - x + 1$$

Las raíces de la ecuación característica son $r_1 = -3.73$ y $r_2 = -0.26$. En este caso, el orden de multiplicidad (la cantidad de veces que el cero es raíz de la ecuación característica) es $h = 0$, pues ninguna de las raíces es cero. La solución particular que se plantea con coeficientes a determinar es:

$$u(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

Si $r = 0$ es raíz de la ecuación característica, se ensaya como solución particular un polinomio **completo** y **del mismo orden de** $Q(x)$ con coeficientes a_i con $i = 0, 1, 2, ..., m$, afectado por la variable independiente, elevada a la cantidad de veces que el cero es raíz (orden de multiplicidad). Si el cero es h veces raíz, la solución particular a ensayar es:

$$u(x) = x^h \left(a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1 x + a_0\right)$$

Ejemplo 5.2.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} = 3x^3 - x + 1$$

Las raíces de la ecuación característica son $r_1 = -4$ y $r_2 = 0$. En este caso, $h = 1$. La solución particular que se plantea con coeficientes a determinar es:

$$u(x) = x\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right)$$

5.3.2. Si $Q(x)$ es una función del tipo exponencial

Si $Q(x)$ es una función del tipo exponencial de la forma $Q(x) = ke^{ax}$, siendo k una constante cualquiera.

Se debe tener en cuenta si a es raíz o no de la ecuación característica.

Si a no es raíz de la ecuación característica, se ensaya como solución particular a la expresión (con A a determinar):

$$u(x) = Ae^{ax}$$

Ejemplo 5.3.

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} = 5e^{-4x}$$

Las raíces de la ecuación característica son $r_1 = 4$, $r_2 = -1$ y $r_3 = 0$. En este caso, $h = 0$. La solución particular que se plantea con A para determinar es:

$$u(x) = Ae^{4x}$$

Si a es h veces raíz de la ecuación característica, se ensaya como solución particular a la expresión (con A a determinar):

$$u(x) = x^h Ae^{ax}$$

Ejemplo 5.4.

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} = 5e^{-x}$$

Las raíces de la ecuación característica son $r_1 = 4$, $r_2 = -1$ y $r_3 = 0$. En este caso, $h = 1$, pues el -1 es una vez raíz de la ecuación característica. La solución particular que se plantea con A para determinar es:

$$u(x) = xAe^{-x}$$

5.3.3. Si $Q(x)$ es una función trigonométrica

Si $Q(x)$ es una función trigonométrica de la forma $Q(x) = \cos(bx)$, o $Q(x) = \operatorname{sen}(bx)$

Se debe tener en cuenta si $\pm bi$ es raíz o no de la ecuación característica.

Si $\pm bi$ no es raíz de la ecuación característica, se ensaya como solución particular a la expresión (con A y B a determinar):

$$u(x) = A\cos(bx) + B\operatorname{sen}(bx)$$

Ejemplo 5.5.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \cos(\pi x)$$

Las raíces de la ecuación característica son $r_{1,2} = \pm 2i$. En este caso, $h = 0$. La solución particular que se plantea con A y B a determinar es:

$$u(x) = A\cos(\pi x) + B\,\mathrm{sen}(\pi x)$$

Si $\pm bi$ es h veces raíz de la ecuación característica, se ensaya como solución particular a la expresión (con A y B a determinar):

$$u(x) = x^h\left[A\cos(bx) + B\,\mathrm{sen}(bx)\right]$$

Ejemplo 5.6.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \cos(2x)$$

Las raíces de la ecuación característica son $r_{1,2} = \pm 2i$. En este caso, además de coincidir en la parte imaginaria, la parte real del número complejo debe ser igual a cero. Por lo tanto, el orden de multiplicidad es $h = 1$. La solución particular que se plantea con A y B a determinar es:

$$u(x) = x\left[A\cos(2x) + B\,\mathrm{sen}(2x)\right]$$

5.3.4. Si $Q(x)$ es una combinación de las anteriores

Si $Q(x)$ es una combinación de las anteriores de la forma $Q(x) = e^{ax}\left[P_m(x)\cos(bx) + R_m(x)\,\mathrm{sen}(bx)\right]$ donde uno de los polinomios $P_m(x)$ o $R_m(x)$ tienen grado m y el otro no mayor a m:

Se debe tener en cuenta si $a \pm bi$ es raíz o no de la ecuación característica.

Si $a \pm bi$ no es raíz de la ecuación característica, se ensaya como solución particular a la expresión:

$$u(x) = e^{ax}\left[P_m(x)\cos(bx) + R_m(x)\,\mathrm{sen}(bx)\right]$$

Ejemplo 5.7.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}y = e^{-x}\left[x\cos(x) + 3\,\mathrm{sen}(x)\right]$$

Las raíces de la ecuación característica son $r_{1,2} = -1/2 \pm 1/2i$ por lo tanto, $h = 0$. La solución particular que se plantea con coeficientes a determinar es:

$$u(x) = e^{-x}\left[(Ax + B)\cos(x) + (Cx + D)\,\mathrm{sen}(x)\right]$$

Si $a \pm bi$ es h veces raíz de la ecuación característica, se ensaya como solución particular a la expresión:

$$u(x) = e^{ax}x^h\left[P_m(x)\cos(bx) + R_m(x)\,\mathrm{sen}(bx)\right]$$

Ejemplo 5.8.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}\left[x\cos(x) + 3\,\mathrm{sen}(x)\right]$$

Las raíces de la ecuación característica son $r_{1,2} = -1 \pm i$ por lo tanto, $h = 1$. La solución particular que se plantea con coeficientes a determinar es:

$$u(x) = xe^{-x}\left[(Ax + B)\cos(x) + (Cx + D)\,\mathrm{sen}(x)\right]$$

5.4. Aplicación de Ecuaciones Diferenciales de segundo orden

Se desarrollará un ejercicio de un sistema masa-resorte como el mostrado en la Figura 5.1. Posteriormente se analizará un sistema masa-resorte-amortiguador. Ambos sistemas serán sometidos a distintas excitaciones externas para generar diferentes respuestas en desplazamientos.

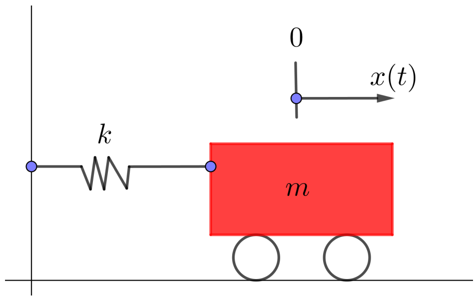

Figura 5.1: Sistema masa-resorte

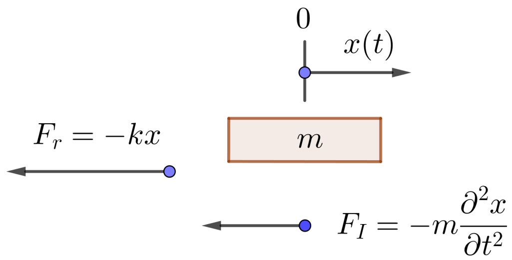

Figura 5.2: Diagrama de cuerpo libre

5.4.1. Vibraciones libres sin amortiguamiento

En este sistema se identifican dos fuerzas (observe la Figura 5.2):

- Fuerza ejercida por el resorte, cuya expresión es:

$$F_r = -kx$$

- Fuerza de inercia debida a la aceleración de la masa:

$$F_I = -m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Ambas fuerzas poseen signo negativo porque se ejercen en dirección contraria al movimiento.

El principio de D'Alembert establece el siguiente equilibrio dinámico:

$$-F_I - F_r = 0$$

La expresión está igualada a cero debido a que no existen fuerzas externas aplicadas a la masa. Reemplazando por las expresiones de F_I y F_r:

$$-m\frac{d^2x}{dt^2} - kx = 0$$

Multiplicando ambos miembros por -1:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Reemplazando la sustitución $x = e^{rt}$, $\frac{dx}{dt} = re^{rt}$ y $\frac{d^2x}{dt^2} = r^2e^{rt}$ en la ecuación diferencial y sacando factor común e^{rt}:

$$e^{rt}\left(r^2 + \frac{k}{m}\right) = 0$$

La ecuación característica es la expresión encerrada entre paréntesis:

$$r^2 + \frac{k}{m} = 0$$

Las raíces de la ecuación característica son imaginarias puras:

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}i$$

Llamando frecuencia natural ω_0 a la expresión $\sqrt{\frac{k}{m}}$, la solución general de la Ecuación Homogénea para este tipo de raíces es:

$$v(t) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

O:

$$v(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

Como se trata de una ecuación homogénea, se tiene

$$v(t) = x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

Es sencillo verificar que si se adoptan las condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{(0)} = 0$, los valores de las constantes son $C_1 = x_0$ y $C_2 = 0$, resultando como solución particular:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$$

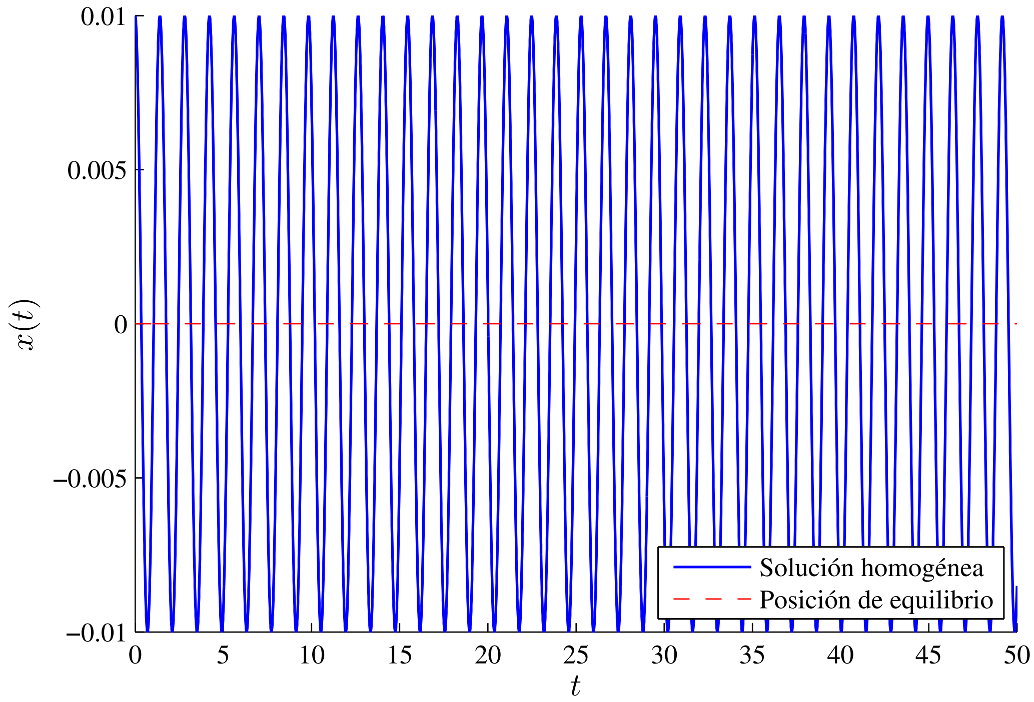

Figura 5.3: Oscilaciones libres sin amortiguamiento

Para generar esta figura, se adoptaron los siguientes valores:

$$
\begin{aligned}
&k = 1000\\
&m = 50\\
&\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 4.47\\
&x(t=0) = 0.01\\
&\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0
\end{aligned}
$$

5.4.2. Vibraciones libres con amortiguamiento

Al sistema anterior se le adiciona un amortiguador viscoso, como el mostrado en la Figura 5.4. Este ejerce una fuerza que es proporcional a la velocidad de la masa y en sentido contrario al movimiento (vea la Figura 5.5), es decir:

$$F_a = -c\frac{dx}{dt}$$

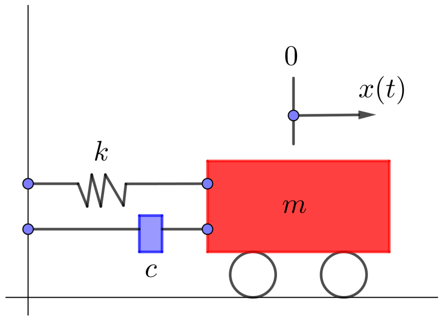

Figura 5.4: Sistema masa-resorte-amortiguador

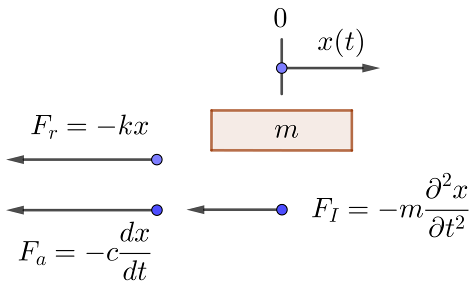

Figura 5.5: Diagrama de cuerpo libre

La ecuación diferencial resultante de aplicar el equilibrio es:

$$-m\frac{d^2x}{dt^2} - c\frac{dx}{dt} - kx = 0 \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{c}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

Sustituyendo a la función por $x = e^{rt}$, $\frac{dx}{dt} = re^{rt}$ y $\frac{d^2x}{dt^2} = r^2e^{rt}$ en la ecuación diferencial y sacando factor común e^{rt}:

$$e^{rt}\left(r^2 + \frac{c}{m}r + \frac{k}{m}\right) = 0$$

La ecuación característica es la expresión encerrada entre paréntesis:

$$r^2 + \frac{c}{m}r + \frac{k}{m} = 0$$

Dependiendo de la relación entre $\left(\frac{c}{m}\right)^2$ y $4\frac{k}{m}$ se pueden dar tres casos:

- 1º Caso: $\left(\frac{c}{m}\right)^2 > 4\omega_0^2$. Las raíces de la ecuación característica son reales y distintas:

$$r_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}$$

Por lo tanto la solución general es:

$$x(t) = v(t) = C_1 e^{\left[-\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}\right]t} + C_2 e^{\left[-\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}\right]t}$$

Este tipo de sistemas se denominan sobre-amortiguados.

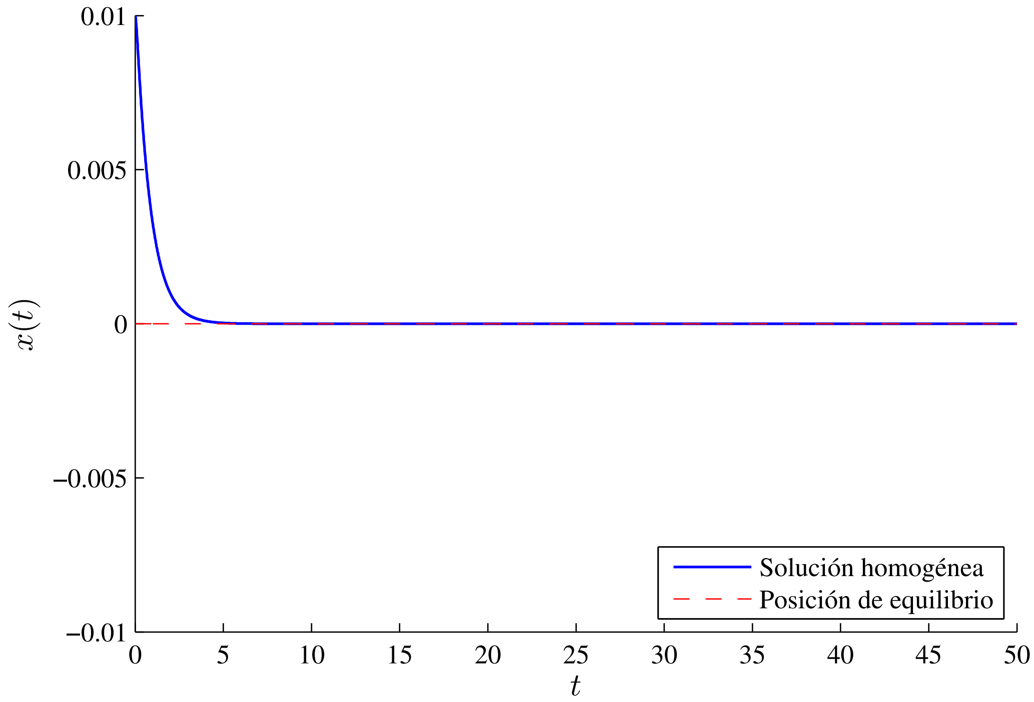

Figura 5.6: Oscilaciones libres sobre-amortiguadas

Para generar esta figura, se adoptaron los siguientes valores:

$$k = 1000$$
$$m = 50$$
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 4.47$$
$$c = 4\sqrt{km} = 894.42$$
$$x(t=0) = 0.01$$
$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

- 2^{o} Caso: $\left(\frac{c}{m}\right)^2 = 4\omega_0^2$ Las raíces de la ecuación característica son reales y coincidentes:

$$r = -\frac{c}{2m}$$

Al anular la raíz, se obtiene el valor de amortiguamiento crítico. Esto es:

$$\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m} \rightarrow c_{cr} = 2\sqrt{km}$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación homogénea es:

$$v(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\,(C_1 t + C_2)$$

Este tipo de sistemas se denominan críticamente amortiguados. El valor de c es el mínimo para evitar oscilaciones en el sistema.

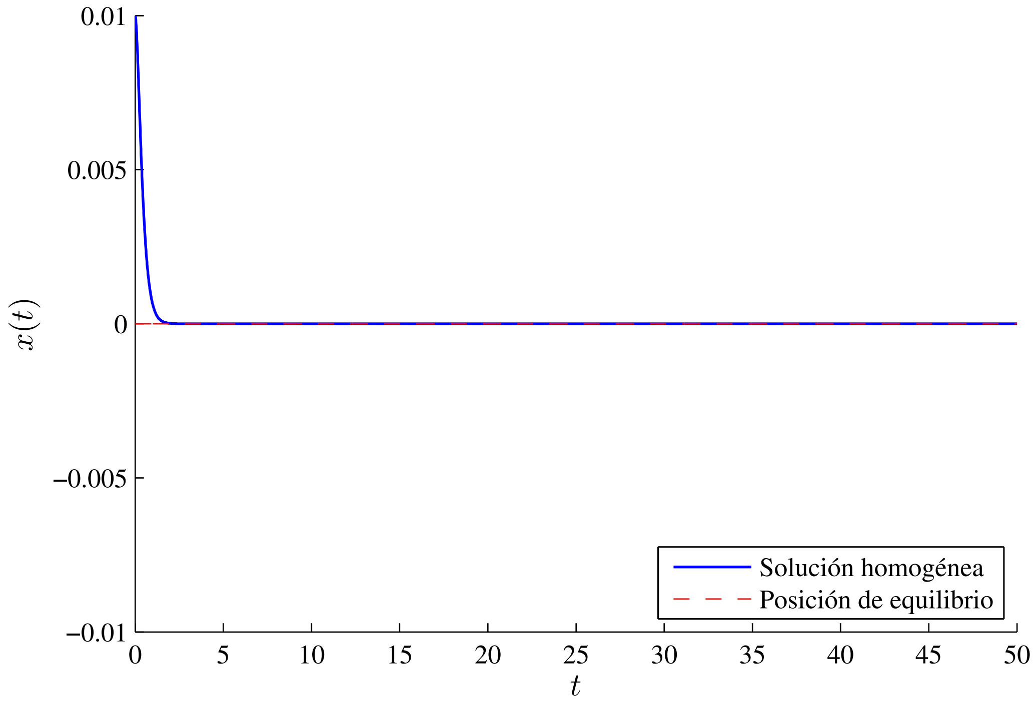

Figura 5.7: Oscilaciones libres críticamente amortiguadas

Para generar esta figura, se adoptaron los siguientes valores:

$$k = 1000$$
$$m = 50$$
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 4.47$$
$$c = 2\sqrt{km} = 447.21$$
$$x(t=0) = 0.01$$
$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

- 3º Caso: $\left(\frac{c}{m}\right)^2 < 4\omega_0^2$ Las raíces de la ecuación característica son complejas conjugadas:

$$r_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$$

Con $a = -\frac{c}{2m}$ y $b = \pm\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}$
Por lo tanto la solución general es:

$$x(t) = v(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left[C_1 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\,t\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}\,t\right)\right]$$

Este tipo de sistemas se denominan sub-amortiguados

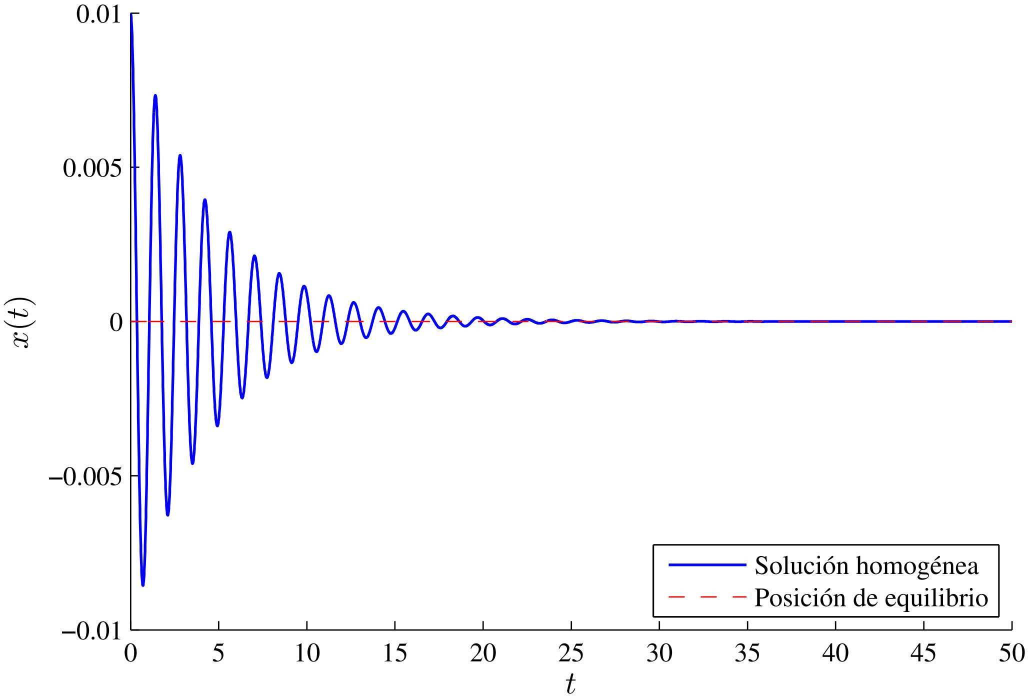

Figura 5.8: Oscilaciones libres sub-amortiguadas

Para generar esta figura, se adoptaron los siguientes valores:

$$
\begin{aligned}
&k = 1000\\
&m = 50\\
&\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 4.47\\
&c = 22\\
&x(t=0) = 0.01\\
&\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0
\end{aligned}
$$

Un modelo que representa las oscilaciones libres puede verse aquí `https://www.geogebra.org/m/zhnhnswy`

5.4.3. Vibraciones forzadas sin amortiguamiento

Si sobre el sistema sin amortiguamiento (vea la Figura 5.9) actúa una fuerza cuya expresión es $F(t) = F_0 \cos(\omega_f t)$, siendo F_0 la amplitud de la fuerza y ω_f su frecuencia, el equilibrio dinámico resulta (vea la Figura 5.10):

$$F_0 \cos(\omega_f t) - m\frac{d^2x}{dt^2} - kx = 0 \rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0 \cos(\omega_f t)$$

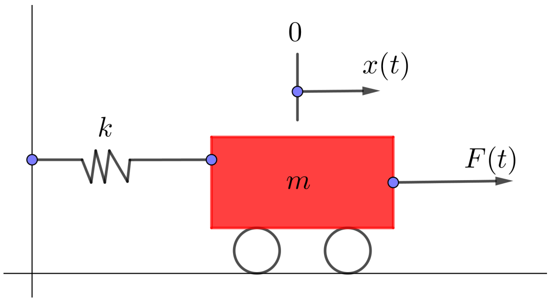

Figura 5.9: Sistema masa-resorte con fuerza externa aplicada

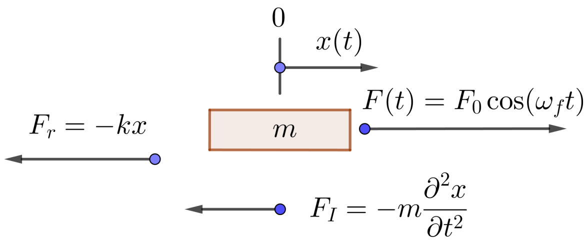

Figura 5.10: Diagrama de cuerpo libre

Asumiendo la solución homogénea vibratoria, esto es, que las raíces de la ecuación característica sean imaginarias puras (debido a la ausencia de amortiguamiento). La solución homogénea es:

$$v(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

La solución particular que se ensaya es:

$$u(t) = A \cos(\omega_f t) + B \operatorname{sen}(\omega_f t)$$

Las derivadas de $u(t)$ con respecto al tiempo resultan:

$$\frac{du}{dt} = -\omega_f A \operatorname{sen}(\omega_f t) + \omega_f B \cos(\omega_f t)$$
$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\omega_f^2 A \cos(\omega_f t) - \omega_f^2 B \operatorname{sen}(\omega_f t)$$

Reemplazando en la ecuación diferencial e igualando los términos que acompañan a las funciones trigonométricas, se obtienen los valores de A y B:

$$A = \frac{F_0}{k - \omega_f^2 m} = \frac{F_0}{\left(\dfrac{k}{m} - \omega_f^2\right) m} = \frac{F_0}{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right) m}$$

$$B = 0$$

La solución particular es:

$$u(t) = \frac{F_0}{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right) m} \cos(\omega_f t)$$

La solución general completa resulta de sumar las soluciones homogénea y particular:

$$x(t) = v(t) + u(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right) m} \cos(\omega_f t)$$

Adoptando condiciones iniciales de reposo, esto es:

$$x(t=0) = 0$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

Las constantes C_1 y C_2 resultan:

$$C_1 = -\frac{F_0}{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right) m}$$

$$C_2 = 0$$

Una solución particular de la completa es:

$$x(t) = -\frac{F_0}{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right) m} \cos\left(\omega_0 t\right) + \frac{F_0}{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right) m} \cos\left(\omega_f t\right)$$

Sacando factor común $\dfrac{F_0}{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right) m}$:

$$x(t) = \frac{F_0}{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right) m} \left[\cos\left(\omega_f t\right) - \cos\left(\omega_0 t\right)\right]$$

Utilizando la siguiente identidad trigonométrica:

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

La solución particular resulta:

$$x(t) = \frac{2F_0}{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right) m} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0 - \omega_f}{2} t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0 + \omega_f}{2} t\right)$$

Este movimiento es conocido como **batido**. La respuesta en desplazamientos es una sinusoidal de mayor frecuencia, envuelta por otra sinusoide de menor frecuencia.

La ecuación de las envolventes (de color rojo en la Figura 5.11) es:

$$x(t) = \pm\frac{2F_0}{\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right) m} \operatorname{sen}\left(\frac{\omega_0 - \omega_f}{2} t\right)$$

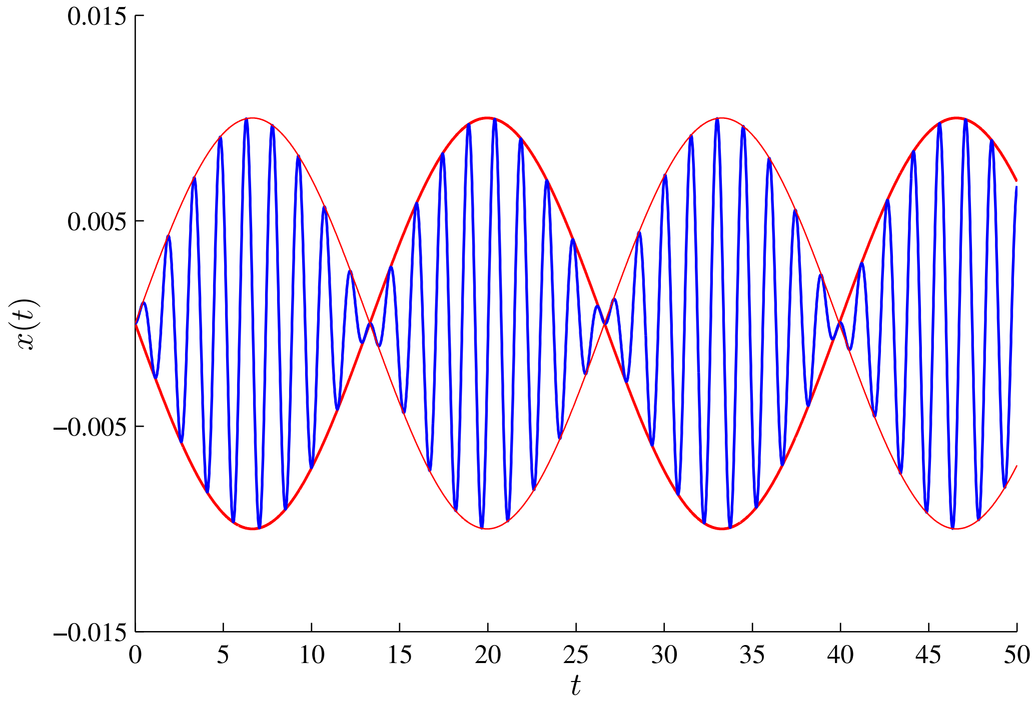

Figura 5.11: Batido

Para generar esta figura, se adoptaron los siguientes valores:

$$k = 1000$$
$$m = 50$$
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 4.47$$
$$\omega_f = 4$$
$$F_0 = 1$$
$$x(t = 0) = 0$$
$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

Ahora se verá el caso particular en el que las frecuencias ω_0 y ω_f son iguales. En base a esta hipótesis, debe cumplirse $\omega_0 = \omega_f$, por lo que ω_f es raíz de la ecuación característica una vez. Esto implica la siguiente solución particular:

$$u(t) = [A\cos(\omega_f t) + B\operatorname{sen}(\omega_f t)]\, t$$

Siguiendo el mismo procedimiento visto (derivando, armando y resolviendo el sistema de ecuaciones), se obtiene la expresión de las constantes A y B:

$$A = 0$$

$$B = \frac{F_0}{2m\omega_f}$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$u(t) = \frac{F_0}{2m\omega_f} \operatorname{sen}(\omega_f t)\, t$$

La solución general completa es:

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \operatorname{sen}(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_f} \operatorname{sen}(\omega_f t)\, t$$

Es posible verificar que, partiendo del reposo (desplazamiento y velocidad nulos), las constantes de la ecuación diferencial son iguales a cero. Es decir: $C_1 = 0$ y $C_2 = 0$. Por lo que la solución particular completa es igual a la solución particular obtenida $u(t)$.

Esta condición (igualdad de frecuencias y amortiguamiento nulo) se denomina **resonancia del sistema**. La respuesta en desplazamientos es una sinusoidal, acotada por dos rectas que cuando el tiempo tiende a infinito, los desplazamientos también.

La ecuación de las rectas envolventes (de color rojo en la Figura 5.12) es:

$$x(t) = \pm\frac{F_0}{2m\omega_f} t$$

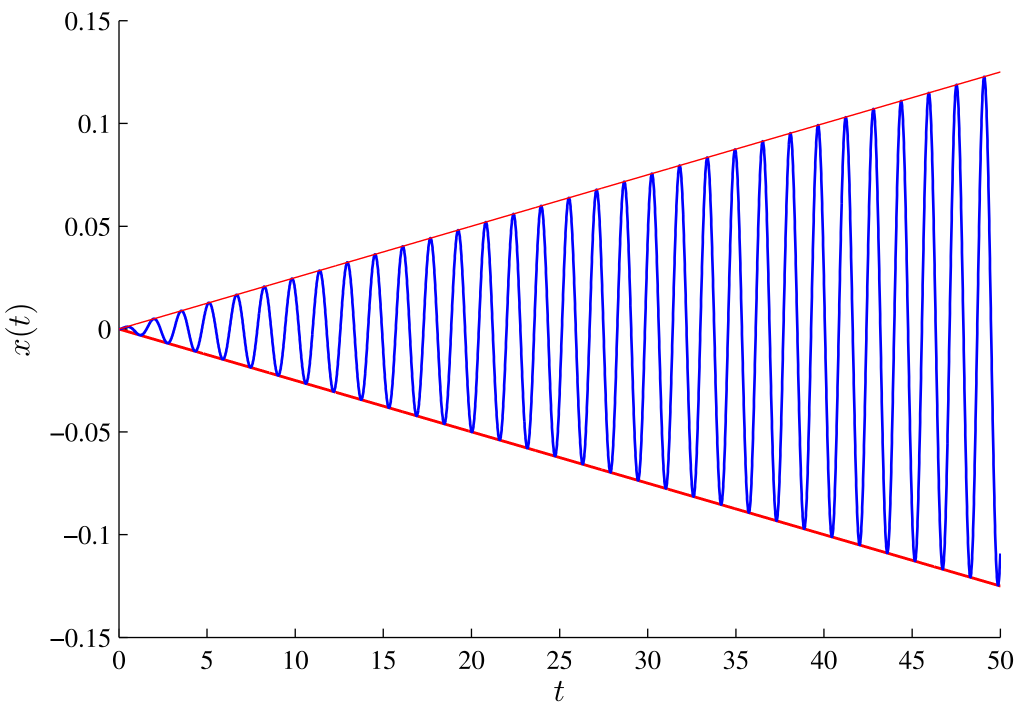

Figura 5.12: Resonancia

La figura se generó con los mismos parámetros del batido.

5.4.4. Vibraciones forzadas con amortiguamiento

Si sobre el sistema amortiguado, como el mostrado en la Figura 5.13 actúa una fuerza cuya expresión es $F(t) = F_0 \cos(\omega_f t)$, siendo F_0 la amplitud de la fuerza y ω_f su frecuencia, el equilibrio dinámico es:

$$F_0 \cos(\omega_f t) - m\frac{d^2x}{dt^2} - c\frac{dx}{dt} - kx = 0$$

Lo que conduce a la siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\omega_f t)$$

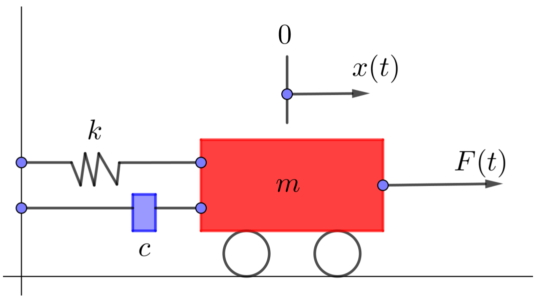

Figura 5.13: Sistema masa-resorte-amortiguador con fuerza externa aplicada

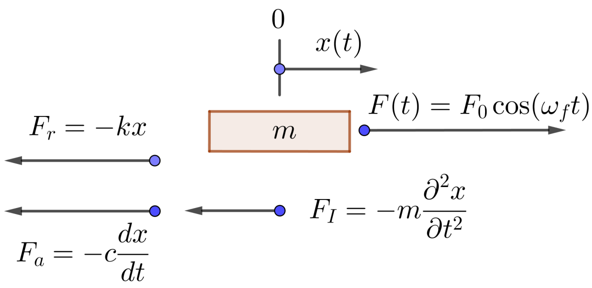

Figura 5.14: Diagrama de cuerpo libre

La solución particular que se ensaya es:

$$u(t) = A\cos(\omega_f t) + B\,\mathrm{sen}(\omega_f t)$$

Los coeficientes indeterminados A y B se obtienen de resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} c\,\omega_f B + \left(k - m\,\omega_f^2\right) A = F_0 \\ \left(k - m\,\omega_f^2\right) B - c\,\omega_f A = 0 \end{cases}$$

$$A = \frac{F_0}{k}\frac{1-\frac{\omega_f^2}{\omega_0^2}}{\left(1-\frac{\omega_f^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{km}}\frac{\omega_f}{\omega_0}\right)^2}$$

$$B = \frac{F_0}{k}\frac{-\frac{c}{\sqrt{km}}\frac{\omega_f}{\omega_0}}{\left(1-\frac{\omega_f^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{km}}\frac{\omega_f}{\omega_0}\right)^2}$$

Por lo tanto, la solución particular resulta:

$$u(t) = \frac{F_0}{k}\frac{1-\frac{\omega_f^2}{\omega_0^2}}{\left(1-\frac{\omega_f^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{km}}\frac{\omega_f}{\omega_0}\right)^2}\cos(\omega_f t) +$$

$$+\frac{F_0}{k}\frac{-\frac{c}{\sqrt{km}}\frac{\omega_f}{\omega_0}}{\left(1-\frac{\omega_f^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{km}}\frac{\omega_f}{\omega_0}\right)^2}\mathrm{sen}(\omega_f t)$$

La solución general completa se obtiene sumando la solución general homogénea y la particular:

$$x(t) = v(t) + u(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left[C_1 \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} t\right) + C_2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} t\right)\right] +$$

$$\frac{F_0}{k}\frac{1 - \frac{\omega_f^2}{\omega_0^2}}{\left(1 - \frac{\omega_f^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{km}}\frac{\omega_f}{\omega_0}\right)^2}\cos(\omega_f t) + + \frac{F_0}{k}\frac{-\frac{c}{\sqrt{km}}\frac{\omega_f}{\omega_0}}{\left(1 - \frac{\omega_f^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{km}}\frac{\omega_f}{\omega_0}\right)^2}\operatorname{sen}(\omega_f t)$$

Adoptando condiciones iniciales de reposo, los valores de C_1 y C_2 resultan:

$$C_1 = -\frac{F_0}{k}A$$

$$C_2 = \frac{c}{2m}C_1 - \frac{\omega_f F_0\ A}{k}\frac{1}{\sqrt{w_0^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2}}$$

La respuesta completa se muestra en la Figura 5.15. Nótese como la solución homogénea (transitoria) va desapareciendo a medida que transcurre el tiempo hasta quedar finalmente la solución particular (se dice que el sistema entró en régimen).

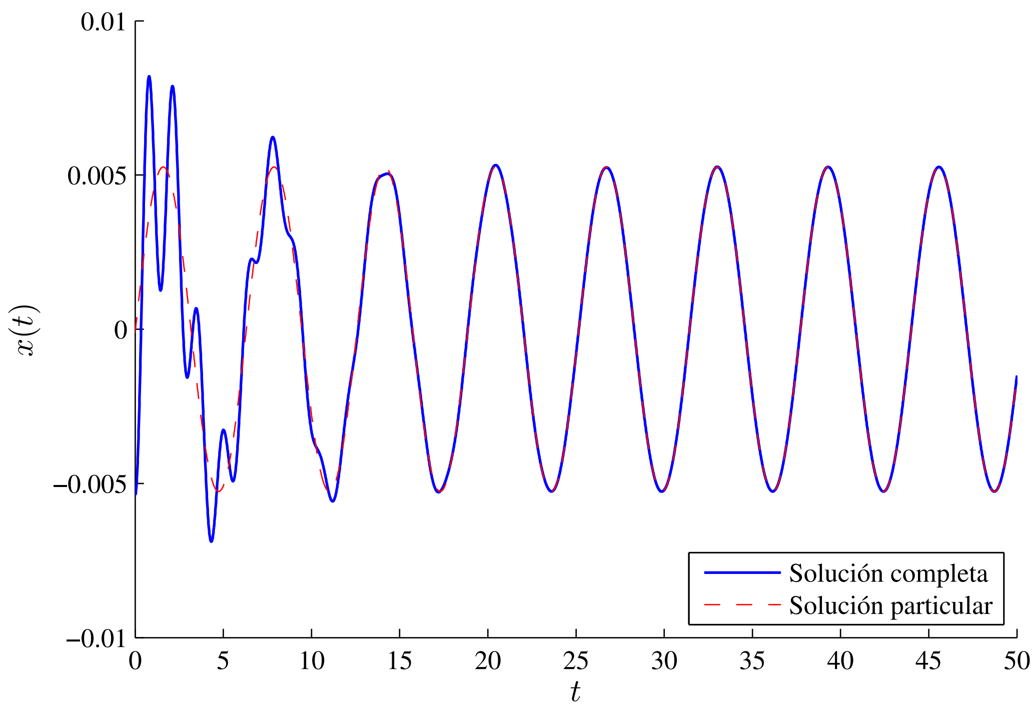

Figura 5.15: Solución completa

Para generar esta figura, se adoptaron los siguientes valores:

$$
\begin{aligned}
&k = 1000\\
&m = 50\\
&\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 4.47\\
&\omega_f = 1\\
&F_0 = 5\\
&c = 22\\
&x(t=0) = 0\\
&\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0
\end{aligned}
$$

6. Sistemas de ecuaciones diferenciales

Hasta ahora se ha resuelto solo una ecuación diferencial. Sin embargo, muchas aplicaciones físicas requieren de más de una ecuación para describir un fenómeno, es decir emplear dos o más variables **dependientes** siendo cada una función de una misma variable independiente (por lo general el tiempo).

Estos problemas conducen a plantear un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias. En general, a la variable independiente se la designará con t y las dependientes con x, y, z, etc.

Un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias tiene la forma:

$$
\begin{cases}
f(t, x, y, x', y') = 0\\
g(t, x, y, x', y') = 0
\end{cases}
$$

La solución consiste en encontrar las funciones $x(t)$ y $y(t)$ que lo satisfacen en algún intervalo de t.

Los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones algebraicas son perfectamente aplicables a este tipo de sistemas:

- Método de eliminación
- Método de igualación
- Regla de Cramer

A modo de ejemplo, se resolverá el siguiente sistema aplicando la regla de Cramer:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = 3x + 5y - e^t, \text{ con } \; x(0) = 1\\[2ex]
\dfrac{dy}{dt} = x - y - e^t, \text{ con } \; y(0) = 0
\end{cases}
$$

Se sustituye a las derivadas por el operador $D = \dfrac{d}{dt}$:

$$\begin{cases} (D-3)x - 5y = -e^t \\ \\ -x + (D+1)y = -e^t \end{cases}$$

Aplicando la regla de Cramer para despejar $x(t)$:

$$x(t) = \frac{\begin{vmatrix} -e^t & -5 \\ -e^t & (D+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (D-3) & -5 \\ -1 & (D+1) \end{vmatrix}}$$

Si se quisiera calcular $y(t)$:

$$y(t) = \frac{\begin{vmatrix} (D-3) & -e^t \\ -1 & -e^t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (D-3) & -5 \\ -1 & (D+1) \end{vmatrix}}$$

Siguiendo con $x(t)$:

$$x(t) = \frac{\begin{vmatrix} -e^t & -5 \\ -e^t & (D+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (D-3) & -5 \\ -1 & (D+1) \end{vmatrix}} = \frac{-(D+1)e^t - 5e^t}{(D-3)(D+1) - 5}$$

$$x(t) = \frac{-(D+1)e^t - 5e^t}{(D-3)(D+1) - 5} = \frac{-7e^t}{D^2 - 2D - 8}$$

$$\left(D^2 - 2D - 8\right) x(t) = -7e^t$$

Esto es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 8x = -7e^t$$

A partir de aquí, se resuelve como una ecuación diferencial lineal de orden n.

La ecuación característica es:

$$r^2 - 2r - 8 = 0$$

Cuyas raíces son $r_1 = 4$ y $r_2 = -2$

La solución general de la homogénea es:

$$x_v(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t}$$

Como $Q(t)$ es una función de tipo exponencial, la solución particular que se ensaya es (1 no es raíz de la ecuación característica):

$$x_u(t) = Ae^t$$

Las derivadas son iguales a $dx_u/dt = d^2x_u/dt^2 = Ae^t$. Reemplazando en la expresión de la ecuación diferencial:

$$Ae^t - 2Ae^t - 8Ae^t = -7e^t$$

$$-9A = -7 \rightarrow A = \frac{7}{9}$$

De aquí se obtiene:

$$x_u = \frac{7}{9}e^t$$

La solución general de la ecuación completa se obtiene de la suma entre x_v y x_u:

$$x(t) = \underbrace{C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t}}_{x_v(t)} + \underbrace{\frac{7}{9}e^t}_{x_u(t)}$$

Volviendo al sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 5y - e^t, \quad x(0) = 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y - e^t, \quad y(0) = 0 \end{cases}$$

Se despeja $y(t)$ de la primera ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 5y - e^t \rightarrow y(t) = \frac{1}{5}\left(\frac{dx}{dt} + e^t - 3x\right)$$

Las expresiones de $x(t)$ y dx/dt resultan:

$$x(t) = C_1 e^{4t} + C_2 e^{-2t} + \frac{7}{9}e^t$$

$$\frac{dx}{dt} = 4C_1 e^{4t} - 2C_2 e^{-2t} + \frac{7}{9}e^t$$

Reemplazando en la expresión de $y(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{5}\left(\frac{dx}{dt} + e^t - 3x\right)$$

Es decir:

$$y(t) = \left[\frac{4}{5}C_1e^{4t} - \frac{2}{5}C_2e^{-2t} + \frac{7}{45}e^t + \frac{e^t}{5} - \frac{3}{5}\left(C_1e^{4t} + C_2e^{-2t} + \frac{7}{9}e^t\right)\right]$$

Operando algebraicamente:

$$y(t) = \frac{1}{5}C_1e^{4t} - C_2e^{-2t} - \frac{1}{9}e^t$$

En resumen:

$$x(t) = C_1e^{4t} + C_2e^{-2t} + \frac{7}{9}e^t$$

$$y(t) = \frac{1}{5}C_1e^{4t} - C_2e^{-2t} - \frac{1}{9}e^t$$

Resta determinar las constantes C_1 y C_2. Para ello se emplean las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $y(0) = 0$:

$$x(t) = C_1e^{4t} + C_2e^{-2t} + \frac{7}{9}e^t \rightarrow 1 = C_1 + C_2 + \frac{7}{9}$$

$$y(t) = \frac{1}{5}C_1e^{4t} - C_2e^{-2t} - \frac{1}{9}e^t \rightarrow 0 = \frac{1}{5}C_1 - C_2 - \frac{1}{9}$$

Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{7}{9} = 1 \\ \frac{1}{5}C_1 - C_2 - \frac{1}{9} = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones por cualquier método visto, los valores de las constantes resultan:

$$C_1 = \frac{5}{18}$$

$$C_2 = -\frac{1}{18}$$

Con lo que se obtienen las soluciones particulares que satisfacen el sistema:

$$x(t) = \frac{5}{18}e^{4t} - \frac{1}{18}e^{-2t} + \frac{7}{9}e^t$$

$$y(t) = \frac{1}{18}e^{4t} + \frac{1}{18}e^{-2t} - \frac{1}{9}e^t$$

En la Figura 6.1 se muestran ambas soluciones.

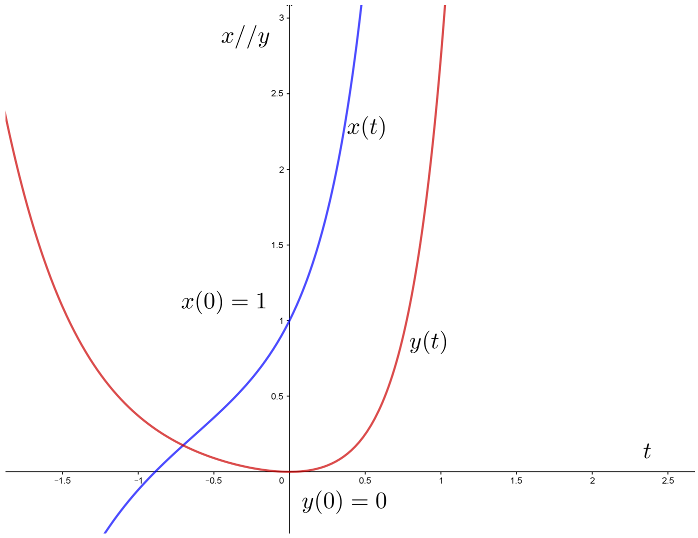

Figura 6.1: Solución del sistema de ecuaciones

6.1. Modelado y simulación de un sistema de tanques

Considere dos tanques de agua, T_1 y T_2, conectados en serie como los que se muestran en la Figura 6.2. Se sabe que la variación del volumen de agua en cada tanque es directamente proporcional a la diferencia entre el caudal de entrada y el de salida en cada tanque (q_0, q_1 y q_2), según corresponda. Además, los caudales de salida de cada tanque son directamente proporcionales a la altura de agua (h_1 y h_2) e inversamente proporcionales a la resistencia ejercida por cada válvula (R_1 y R_2). Considere que el área transversal de cada tanque es constante e igual a A_1 y A_2, respectivamente. Encuentre y resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales que modele este problema.

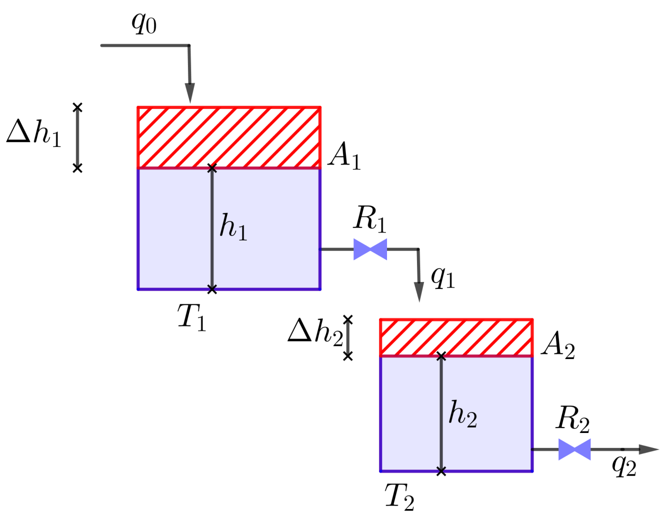

Figura 6.2: Sistema de tanques

Para modelar el sistema anterior se deben tener en cuenta las siguientes ecuaciones:

$$h_1(t) = R_1 q_0 \left[1 - e^{(-t/(A_1 R_1))}\right]$$
$$h_2(t) = \frac{h_1}{R_1} \bigg/ \left(A_2 + \frac{1}{R_2}\right)$$

Sabiendo que las áreas A_1 y A_2 vienen dadas por:

$$A_1 = \pi r_1^2$$
$$A_2 = \pi r_2^2$$

Cabe destacar que los caudales q_1 y q_2 pueden expresarse de la siguiente manera:

$$q_1 = h_1/R_1$$
$$q_2 = h_2/R_2$$

Finalmente, ingresando las ecuaciones referidas a los niveles de agua en función del tiempo (h_1 y h_2) y las correspondientes a las áreas de los tanques en GeoGebra, y fijando los valores $r_1 = 1.5$, $r_2 = 1.4$, $q_0 = 4$, $R_1 = 1$ y $R_2 = 2$ se obtiene:

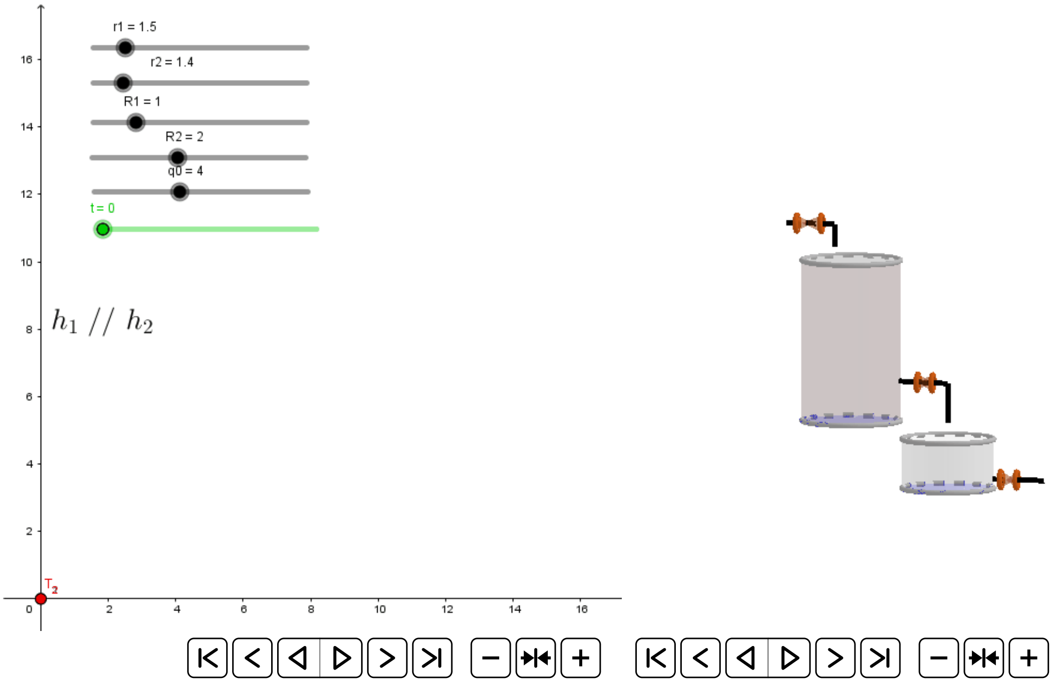

Figura 6.3: Sistema de dos tanques conectados en serie