UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN JUAN

FACULTAD DE INGENIERÍA

Departamento de Matemática

ANÁLISIS MATEMÁTICO II - CÁLCULO II

Ing. en Agrimensura - Ing. Civil - Ing. de Minas - Ing. en Metalurgia Extractiva

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Equipo de cátedra

Mg. Ing. Pablo G. Marcuzzi Naveda
Dra. Ing. Cecilia Fernández
Mg. Lic. Alejandra Garcés
Dra. Ing. Celia Román

Año 2022

Índice

1. Introducción

En Cálculo I se estudiaron en detalle las funciones de la forma $y = f(x)$, es decir funciones que dependían de una sola variable independiente. A menudo, los problemas que se presentan en la ingeniería no pueden ser descritos por un modelo matemático tan sencillo como el anteriormente mencionado. Por esta razón es necesario generalizar el concepto de función de una variable independiente.

1. El volumen de un cilindro V depende del radio (R) y de la altura (h):

$$V = f(R, h).$$

2. La temperatura T en cualquier punto de la superficie del planeta depende de cuatro variables independientes: ángulo de longitud (ϕ), ángulo de latitud (θ), altura sobre el nivel del mar (h) y tiempo (t):

$$T = g(\phi, \theta, h, t).$$

3. La presión P ejercida por un gas ideal encerrado es función de su temperatura (T) y volumen (V):

$$P = h(T, V).$$

4. La velocidad del agua $\mathbf{v}$ que corre por un canal abierto dependerá de la distancia al borde (x) y de la profundidad (y):

$$\mathbf{v} = \mathbf{f}(x, y).$$

5. La ley de la gravitación formulada por Newton postula que la fuerza de atracción $\mathbf{F}$ entre dos objetos de masa m_1 y m_2 respectivamente, depende (además de sus masas) del cuadrado de la distancia $(\mathbf{r})$ a la que se encuentran:

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}(m_1, m_2, \mathbf{r}).$$

De la comparación entre los ejemplos surgen algunas ideas que luego se formalizarán:

- En todos los ejemplos hay dependencia de más de una variable. Si esto ocurre, las variables independientes pueden ser descritas por un vector.
- En todos los casos, las funciones o campos toman valores de variables independientes y hacen corresponder un resultado (número o vector)
- Las funciones (o campos) de los ejemplos 1, 2 y 3 arrojan como resultado un **escalar** (volumen, temperatura y presión, respectivamente).

- Las funciones (o campos) de los ejemplos 4 y 5 arrojan como resultado un **vector** (velocidad y fuerza, respectivamente).

Primeramente el estudio se enfocará en funciones o campos que dependan de dos variables y arrojen como resultado un número.

2. Funciones de varias variables

Se comenzará definiendo una función escalar de dos variables, con su correspondiente campo de existencia, y posteriormente se generalizará para n variables independientes.

2.1. Funciones escalares de dos variables

Definición 2.1. Una función de dos variables f es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y), contenidos en un conjunto D, un valor real único denotado como $z = f(x, y)$.

Lo enunciado en la Definición 2.1 puede escribirse en símbolos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f : D &\to \mathbb{R} \qquad\qquad D \subseteq \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\to z = f(x, y) \end{aligned}$$

O en forma vectorial: $z = f(\mathbf{r})$ con $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = [x \quad y]^T$ (Observe la Figura 2.1).

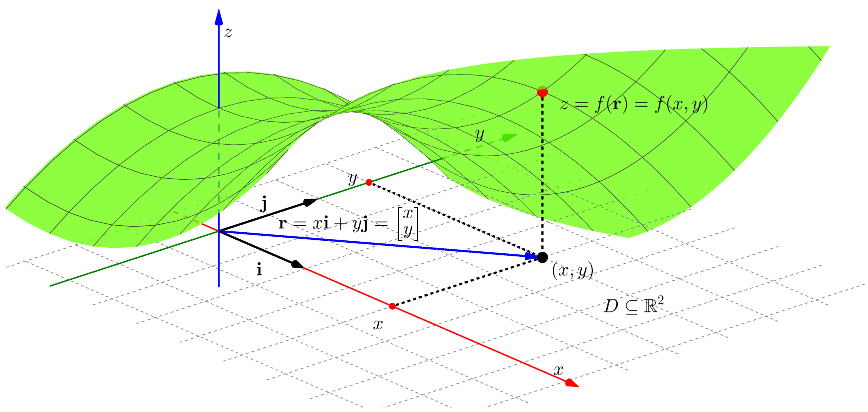


Figura 2.1: Representación de una función genérica de dos variables $z = f(x, y)$

Como se mencionó anteriormente, las variables independientes que representan las coordenadas del punto (x, y) del plano pueden ser descritas por el vector $\mathbf{r}$; y al arrojar un número como resultado, puede decirse que esta función o campo es **escalar** de **variable vectorial**.

Definición 2.2. El conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ se denomina **dominio o campo de existencia** de f de tal manera que cumple $\{z = f(x, y) \in \mathbb{R} / (x, y) \in D\}$

La Definición 2.2 indica que el dominio es el conjunto o espacio donde "viven" las variables independientes de la función. Para entender mejor el concepto, se verá el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.1. Determine y grafique el dominio o campo de existencia de la función $z = f(x, y) = \dfrac{2}{\ln(x - y)}$.

Observando la expresión de $z = f(x, y)$ se advierten dos peculiaridades: 1) el logaritmo natural no se encuentra definido en el campo de números reales ($\mathbb{R}$) para números negativos y el cero; 2) el denominador debe ser distinto de cero. Hay que evaluar cual de estas dos premisas es más restrictiva, ya que el dominio será igual a ella:

1. Logaritmo natural no se encuentra definido para números negativos ni el cero. Esto implicaría lo siguiente:

$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y > 0\Big\}$$

   Es decir, la diferencia $x - y$ debe ser **estrictamente mayor** que cero para que la función se encuentre definida (Ver la Definición 2.2).

2. El denominador debe ser distinto de cero. Para que esta condición se verifique debe cumplirse:

$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y \neq 1\Big\}$$

   Esto significa que la diferencia $x - y$ podría tomar cualquier valor excepto el 1.

Por lo tanto, el dominio o campo de existencia de la función resulta de la unión de ambas condiciones:

$$D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y > 0 \wedge x - y \neq 1\Big\}$$

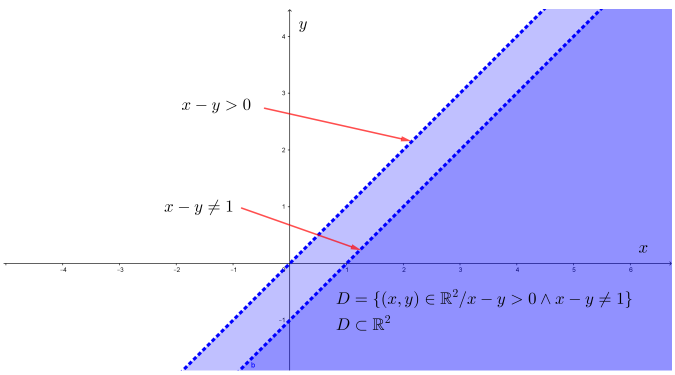


Figura 2.2: Campo de existencia de $z = f(x, y) = \dfrac{2}{\ln(x - y)}$

Note que las línea dadas por las ecuaciones $y = x$ y $y = x - 1$, se encuentran dibujadas a trazos. Esto se debe a que los puntos pertenecientes a las rectas no pertenecen al dominio de la función.

2.2. Funciones escalares de n variables

La generalización de las Definiciones 2.1 y 2.2 para n variables independientes es trivial, no así la gráfica de los campos de existencia, ya que campos de existencia con dimensión mayor a 3 no pueden graficarse. Por lo tanto:

Definición 2.3. Una función de n variables f es una regla que asigna a un grupo de números reales $(x_1, x_2, ..., x_n)$, contenidos en un conjunto D, un valor real único denotado como $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Definición 2.4. El conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se denomina **dominio o campo de existencia** de f de tal manera que cumple $\{z = f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}/(x_1, x_2, ..., x_n) \in D\}$

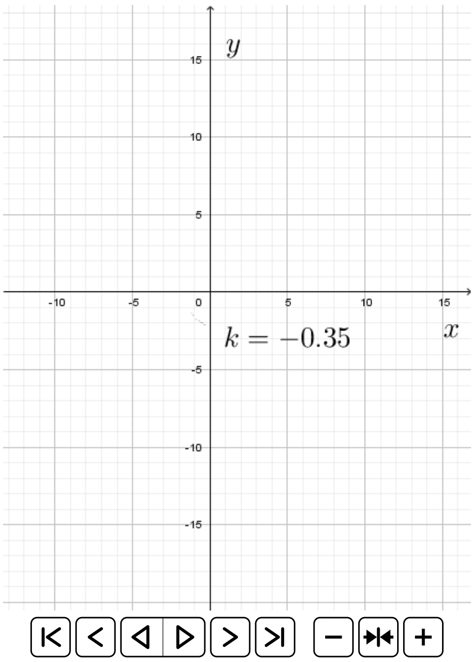
2.3. Representación gráfica

Cuando se trata de funciones de una sola variable del tipo $y = g(x)$, la representación gráfica es una curva: a cada punto del dominio x_0 le corresponde una altura $g(x_0)$, quedando determinada una figura de 2 dimensiones. Extrapolando esta idea a funciones de 2 variables independientes $z = f(x, y)$, se tiene que a cada par ordenado del dominio (x_0, y_0) la función f le hace corresponder una altura $z_0 = f(x_0, y_0)$, resultando un punto en el espacio de coordenadas $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. El conjunto de todos estos puntos se denominará superficie o gráfica de la función $z = f(x, y)$. Para más de dos variables, la gráfica no puede realizarse.

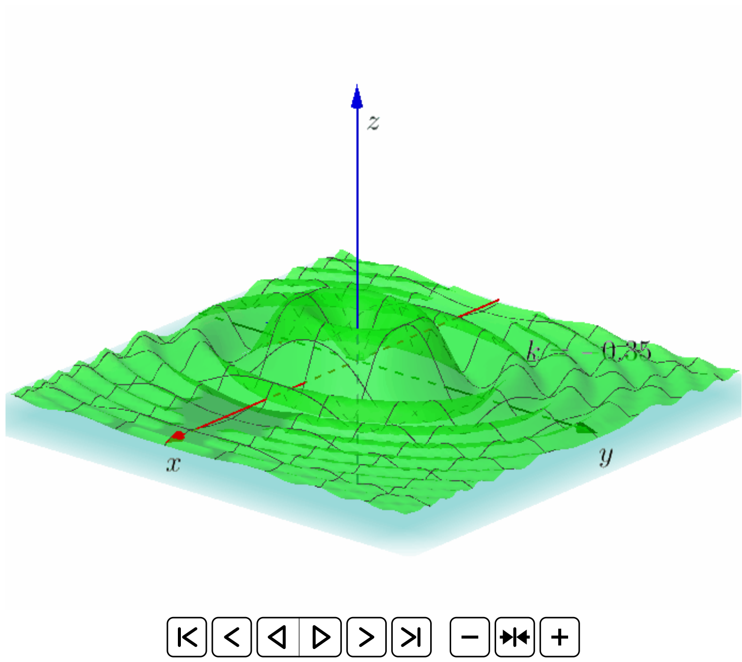
2.4. Curvas de nivel

Definición 2.5. Sea la función escalar de dos variables $z = f(x, y)$, se denomina **curva de nivel** a la proyección sobre el plano xy de la intersección de la función $z = f(x, y)$ con planos de ecuación $z = k$ con $k \in \mathbb{R}$.

El conjunto de curvas de nivel se denomina mapa de contorno. Observe la Figura 2.3.



Mapa de contorno



Curvas de nivel

Figura 2.3: Mapa de contorno y curvas de nivel

Ejemplo 2.2. Encuentre algunas curvas de nivel de la función $z = f(x, y) = x^2 + y^2$.

La función es una cuádrica que se denomina paraboloide circular. La expresión genérica de una curva de nivel se obtiene al resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} z = f(x, y) = x^2 + y^2 \\ z = k \end{cases}$$

El resultado es:

$$x^2 + y^2 = k$$

Es decir, circunferencias de radio igual a $\sqrt{k}$, siendo k la altura del plano de corte. En la Figura 2.4 se pueden observar las curvas de nivel resultantes para $0 \leq k \leq 3$.

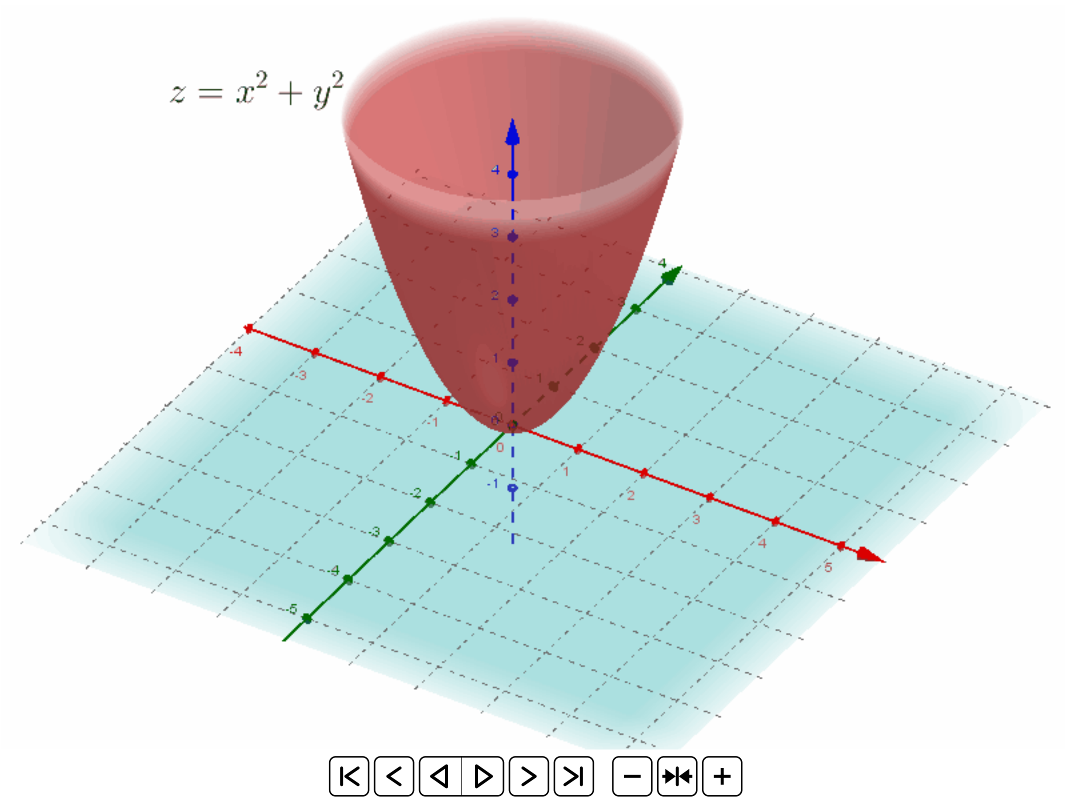


Figura 2.4: Curvas de nivel

En la expresión genérica de las curvas de nivel, se ve claramente que k no puede tomar valores negativos debido a que es igual a la suma de dos números elevados al cuadrado. Debido a esto, conviene acotar los valores de k de la siguiente manera: $x^2 + y^2 = k, k \geq 0, k \in \mathbb{R}$.

Las curvas de nivel son de gran utilidad en el campo de la meteorología, donde unen puntos con igual presión atmosférica, o igual temperatura. También se utilizan en levantamientos topográficos, donde unen puntos del terreno de igual altura, entre otros usos.

2.5. Límite doble

Antes de introducir el concepto de límite, es necesario definir algunos conceptos:

Definición 2.6. Sea un punto $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$ y δ un número positivo dado, se denomina **conjunto o intervalo abierto** a todos los puntos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tales que:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\|_p < \delta$$

siendo $\|\bullet\|_p$ la norma p (en este curso se trabajará con la norma 2, también denominada norma euclídea) de la diferencia entre ambos puntos. Este entorno se denotará como $U(\mathbf{x_0}, \delta)$.

$$U(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R} / x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} = \{x \in \mathbb{R} / |x - x_0| < \delta\}$$

Si $n = 2$ se obtiene un entorno abierto de forma circular, con radio δ y centro $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$ (Ver Figura 2.6).

$$U(\mathbf{x_0}, \delta) = \left\{\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\right\}$$

Si $n = 3$ la forma del entorno sería esférica y la expresión del conjunto sería análoga a las anteriores. Note que según la Definición 2.6, al ser la norma 2 estrictamente menor que δ, en ningún caso se incluyen los bordes del entorno.

Definición 2.7. Sea un punto $\mathbf{x_0} \in \mathbb{R}^n$ y δ un número positivo dado, se denomina **entorno reducido** a todos los puntos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tales que:

$$0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x_0}\| < \delta$$

Este entorno se denotará como $U_*(\mathbf{x_0}, \delta)$.

Observe que el entorno reducido no incluye el punto x_0.

Definición 2.8. Un punto $\mathbf{x_0} \in A$ con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un **punto interior** de A si existe $U(\mathbf{x_0}, \delta)$ tal que $U(\mathbf{x_0}, \delta) \subseteq A$.

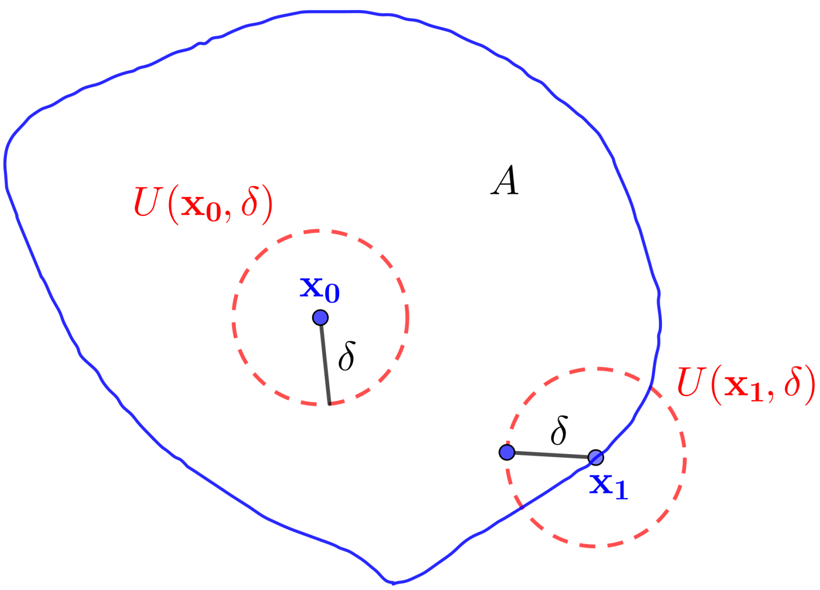


Figura 2.5: Interpretación gráfica de punto interior: el punto $\mathbf{x_0}$ es un punto interior de A; el punto $\mathbf{x_1}$ es un punto de frontera de A

Definición 2.9. Si todos los puntos de un conjunto R son puntos interiores, entonces R será una **región abierta**.

Con estos conceptos aclarados, es conveniente definir el límite de una función de dos variables, para luego generalizar a una función de n variables.

Definición 2.10. Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables, $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$ un punto perteneciente al dominio de la función y L un número real. Se define **límite doble de la función** como:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \iff \forall\epsilon > 0\ \exists\ U_*[(x_0, y_0), \delta] \subset D /$$

$$\forall(x, y) \in U_*[(x_0, y_0), \delta], f(x, y) \in U(L, \epsilon)$$

Y se lee: $f(x, y)$ tiende a L cuando el punto (x, y) tiende a (x_0, y_0) si y solo si para todo número ϵ mayor que cero existe un entorno reducido incluido en el dominio de la función (Definición 2.7) con centro en (x_0, y_0) y radio δ tal que para todo punto (x, y) que pertenezca al entorno reducido U_*, los valores que tome la función pertenezcan a un entorno (en este caso sobre el eje z) con centro en L y radio ϵ. Esta definición puede observarse en la Figura 2.6.

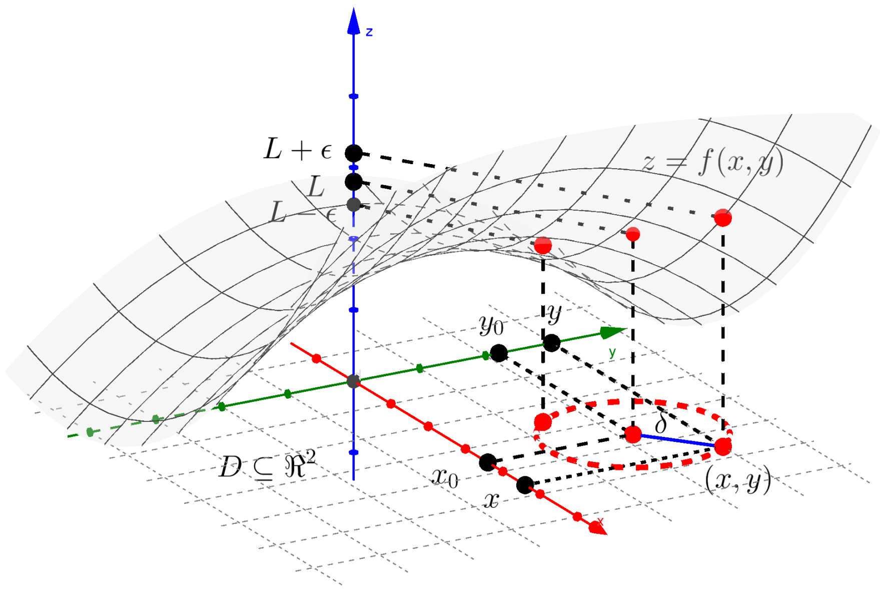


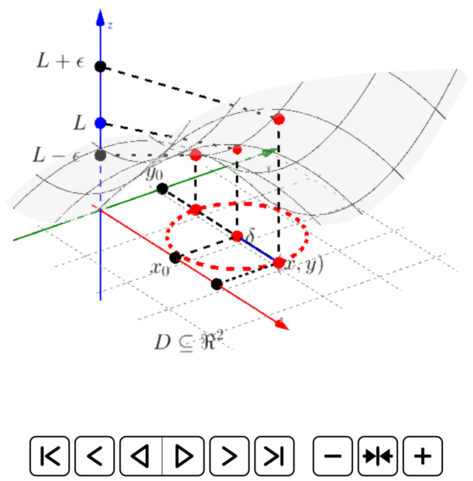
Figura 2.6: Definición de límite para dos variables

En las funciones de una sola variable, para asegurar la existencia del límite era necesario verificar la tendencia de $x \to x_0$ por izquierda y por derecha. Si ambas resultaban iguales, se afirmaba que el límite existía.

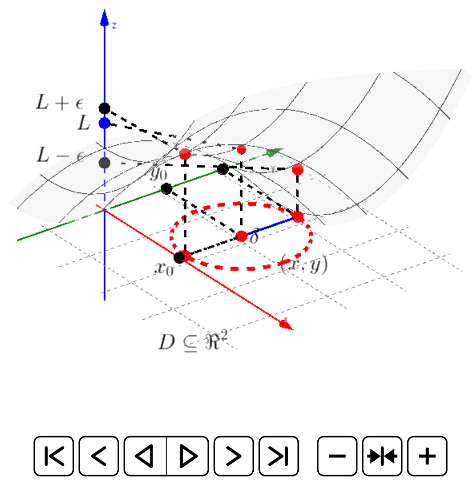
Para funciones de dos variables, donde el entorno del punto es circular (Figura 2.6), se advierte claramente que no existe una única manera de lograr que el punto (x, y)

tienda a (x_0, y_0). De hecho, las direcciones en las que se puede resolver esta tendencia son infinitas. Y además, en el hipotético caso de que se pudiese evaluar el límite por las infinitas direcciones, todas deberían dar el mismo valor para asegurar que el límite existe.

Si bien existen maneras de calcular el límite doble tales como la propuesta de diferentes direcciones de tendencia de $(x, y) \to (x_0, y_0)$ (observe la Figura 2.7), y por definición, en este curso no se profundizará en ellas.



Limite doble según una dirección paralela al eje x



Limite doble según una dirección paralela al eje y

Figura 2.7: Limites dobles según dos direcciones diferentes

2.6. Continuidad

Se definirá la continuidad para una función de una variable y luego se extenderá a funciones de dos variables.

Definición 2.11. Una función $f(x)$ es **continua** en un punto x_0 si se cumplen las siguientes condiciones:

- $$\exists\ y = f(x_0)$$
- $$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$
- $$y = f(x_0) = L$$

De acuerdo a la Definición 2.11, se pueden presentar tres casos:

1. Función continua en el punto x_0

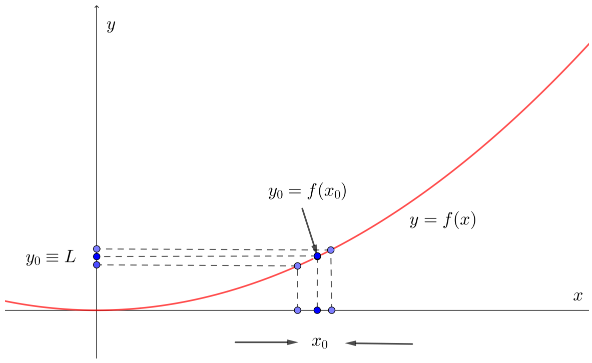


Figura 2.8: Función continua en x_0

En este caso se verifican las 3 condiciones y se asegura que la función $y = f(x)$ es continua en el punto x_0.

2. Función con discontinuidad evitable en el punto x_0

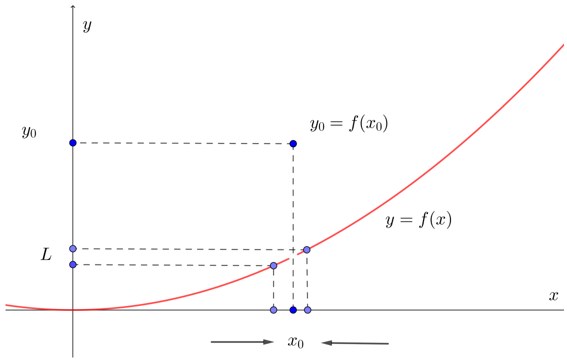


Figura 2.9: Función con discontinuidad evitable en x_0

En este segundo ejemplo, se tiene:

1. $\exists\ y = f(x_0)$ ✓
2. $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ ✓
3. $y = f(x_0) \neq L$ ✗

Debido a que la tercer condición no se cumple se dice que este tipo de continuidad es evitable.

3. Función con discontinuidad no evitable en el punto x_0

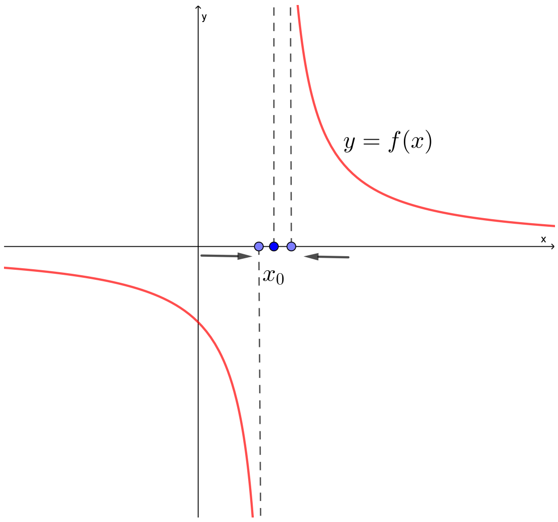


Figura 2.10: Función con discontinuidad no evitable en x_0

El tercer caso supone un ejemplo de discontinuidad no evitable:

1. $\nexists\ y = f(x_0)$ ✗
2. $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x) = L$ ✗
3. $y = f(x_0) \neq L$ ✗

Ahora, se definirá la continuidad para funciones de dos variables como una analogía de la Definición 2.11:

Definición 2.12. Una función $f(x, y)$ es **continua** en un punto (x_0, y_0) si se cumplen las siguientes condiciones:

- $$\exists\ z = f(x_0, y_0)$$
- $$\exists \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$
- $$z = f(x_0, y_0) = L$$

Una función $f(x, y)$ será continua en un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si es continua en cada punto de A.

2.7. Infinitésimos

Definición 2.13. Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables y (x_0, y_0) un punto perteneciente al dominio, se dice que $z = f(x, y)$ es un **infinitésimo** en el punto (x_0, y_0) si se cumple:

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = 0$$

Existe un lema cuyo enunciado es: “Toda función $f(x,y)$ que posea límite L puede escribirse como la suma de este límite L y un infinitésimo $\beta(x,y)$”, esto es $f(x,y) = L + \beta(x,y)$. La demostración es trivial:

Por hipótesis, se tiene que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$. Por otro lado, se propone la función $\beta(x,y) = [f(x,y) - L]$. Tomando límite resulta: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \beta(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x,y) - L] = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) - \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} L = L - L = 0$. Con esto, se demuestra que $\beta(x,y)$ es un infinitésimo cuando $(x,y) \to (x_0,y_0)$ y que $f(x,y) = L + \beta(x,y)$.

2.8. Derivadas parciales

Definición 2.14. Sea $z = f(x,y)$ un campo escalar con dominio incluido en $\mathbb{R}^2$, Δx y Δy escalares que pertenecen a $\mathbb{R}$, se define **derivada parcial de f(x,y) con respecto a x** a la expresión:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x},$$

siempre que el límite exista.

De manera análoga, se define **derivada parcial de f(x,y) con respecto a y** a la expresión:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y},$$

siempre que el límite exista.

Observe que para calcular la derivada parcial con respecto a x, solamente se incrementa esta variable y el límite se aplica a este incremento, considerando a la variable y como una **constante**. De manera análoga, cuando se calcula la derivada parcial con respecto a y, la x se considera igual que una constante.

2.8.1. Notación

Si $z = f(x,y)$ la derivada parcial con respecto a x puede denotarse como:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x(x,y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$$

En tanto que la derivada parcial con respecto a y puede denotarse como:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y(x,y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$$

La derivada parcial con respecto a x evaluada en un punto ($\mathbf{x_0} = (x_0,y_0)$) se escribe como:

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)$$

Para la derivada parcial con respecto a y:

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = f_y(x_0,y_0)$$

2.8.2. Interpretación geométrica

Geométricamente, la derivada parcial de $z = f(x,y)$ con respecto a x representa la pendiente de la recta tangente a la curva γ, generada por la intersección de la función $z = f(x,y)$ y un plano π_1 de ecuación $y = y_0$ (es decir, con y constante), en un punto $[x_0, y_0, f(x_0,y_0)]$. Observe la Figura 2.11a.

La curva γ se obtiene como:

$$\gamma = \begin{cases} z = f(x,y) \\ y = y_0 \end{cases} \rightarrow \gamma : z = f(x,y_0)$$

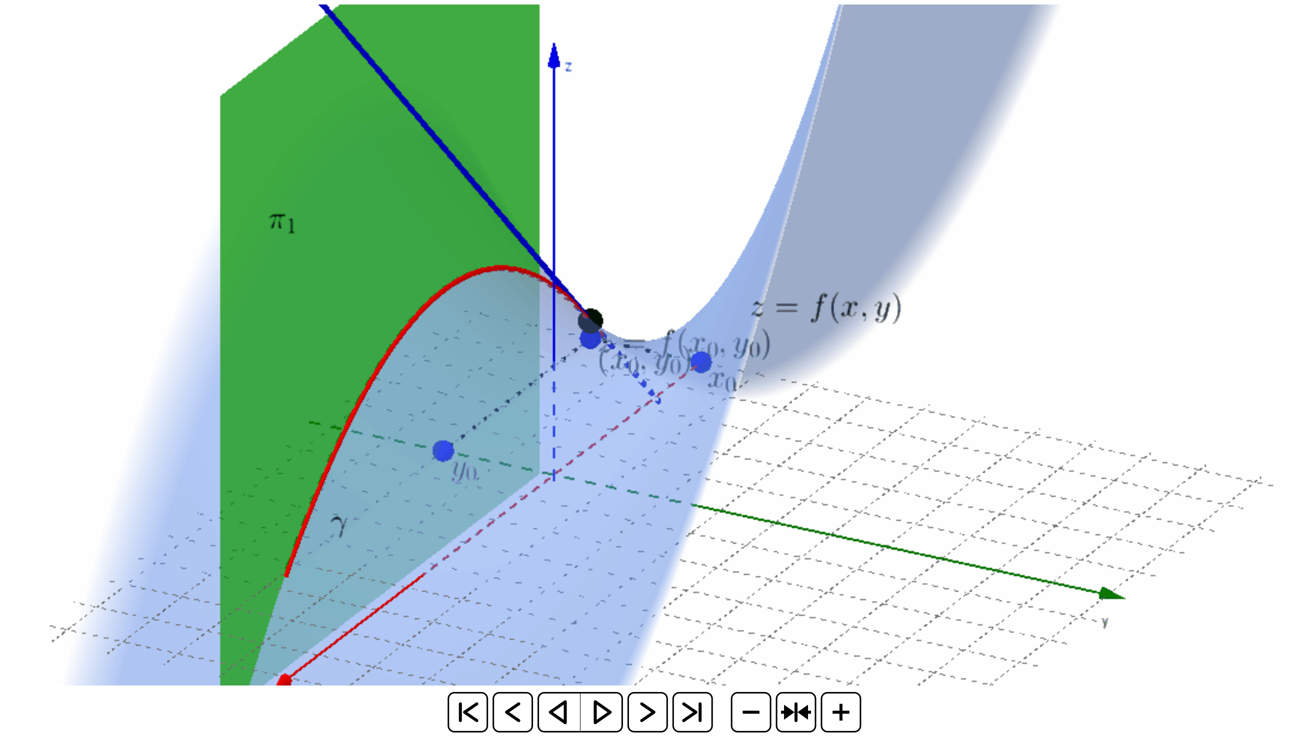
De Cálculo I, se sabe que la pendiente de la recta tangente en el punto (x_0,y_0) es:

$$m = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

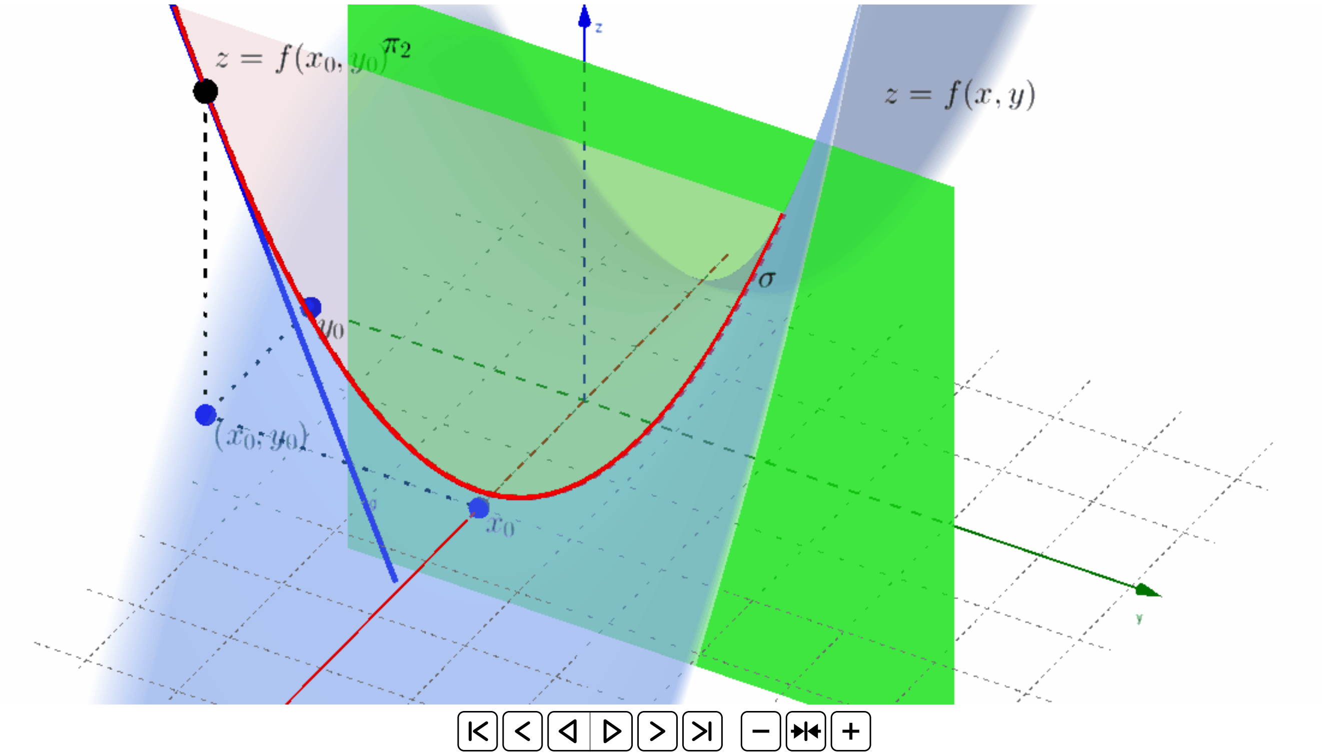
Por lo visto en la Definición 2.14, el valor de m es la derivada parcial de $f(x,y)$ con respecto a x, por lo tanto la ecuación de la recta tangente es:

$$\begin{cases} y = y_0 \\ z - z_0 = \left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} (x - x_0) \end{cases}$$

Observe que la recta se encuentra contenida en el plano π_1.



(a) Interpretación geométrica derivada parcial con respecto a x



(b) Interpretación geométrica derivada parcial con respecto a y

Figura 2.11: Interpretación geométrica de derivadas parciales

Siguiendo un razonamiento análogo se obtiene que la derivada de $z = f(x, y)$ con respecto a y es la pendiente de la recta tangente a la curva σ, generada por la intersección de la función $z = f(x, y)$ y un plano π_2 de ecuación $x = x_0$ (es decir, con x constante), en un punto $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ (Vea la Figura 2.11b).

Por lo tanto, la ecuación de la recta tangente a la curva σ en el punto (x_0, y_0) resulta:

$$\begin{cases} x = x_0 \\ \\ z - z_0 = \left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} (y - y_0) \end{cases}$$

Ejemplo 2.3. Encuentre la recta tangente a la curva σ generada como la intersección de la función $z = f(x, y) = 1 - 0.2x^2 + 0.4y^2$ y el plano $x = 0$, en el punto $(0, 2)$.

Como se pide una intersección con un plano $x =$ cte, es claro que se debe calcular la derivada parcial con respecto a y para obtener la pendiente de dicha recta. Por lo tanto:

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = 0.8y|_{(0,2)} = 1.6$$

Se tiene que la pendiente de la recta tangente en $(0, 2)$ es 1.6. Luego, la ecuación de la recta conocido un punto y la pendiente es:

$$z - z_0 = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} (y - y_0) = z - 2.6 = 1.6(y - 2) \rightarrow z = 1.6y - 0.6$$

El valor 2.6 se obtuvo al reemplazar los valores del punto $(0, 2)$ en la función, es decir $z_0 = f(0, 2) = 1 - 0.2(0)^2 + 0.4(2)^2 = 2.6$. En la Figura 2.12 se observa la función, la recta tangente, la curva σ, el plano $x = 0$ y el punto de tangencia.

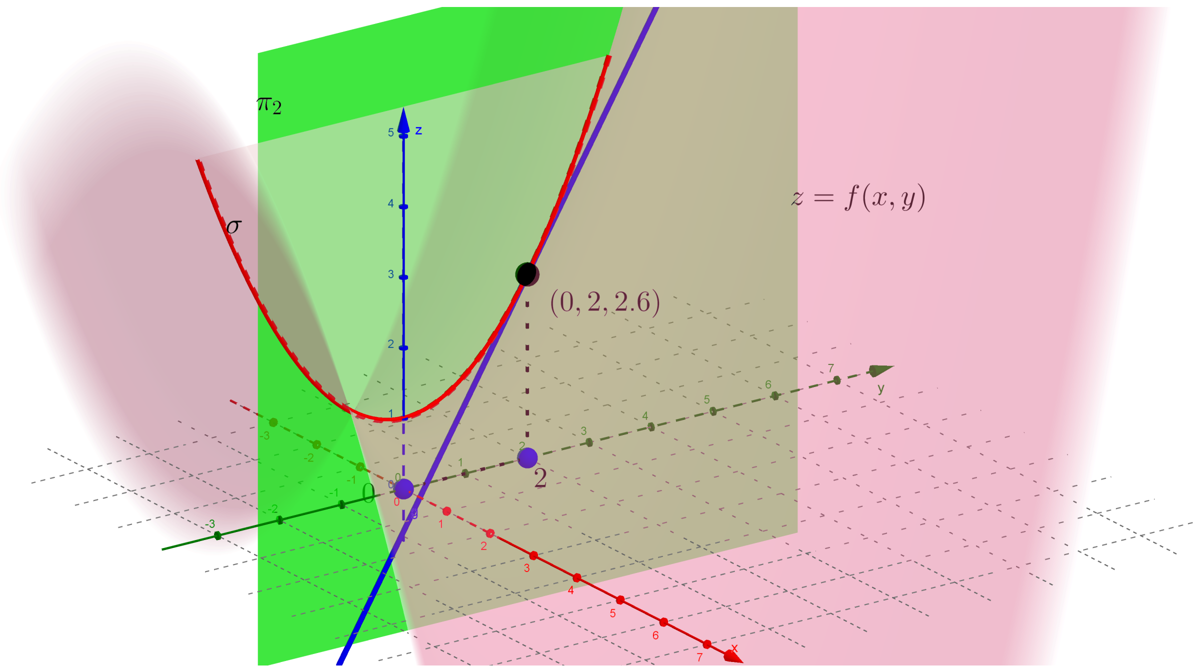


Figura 2.12: Ejemplo recta tangente a la función $z = 1 - 0.2x^2 + 0.4y^2$ en el punto $(0, 2)$

2.8.3. Derivadas sucesivas

Dada una función $z = f(x, y)$ se vió en la Sección 2.8 que las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x(x,y)$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y(x,y)$$

también eran funciones de (x, y) al igual que $z = f(x, y)$. Por lo tanto, pueden derivarse de nuevo con respecto a las variables independientes dando lugar a lo que se conoce como **derivadas sucesivas**. De esta manera se tiene:

- Derivada segunda de $z = f(x, y)$ con respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = f_{xx}$$

- Derivada segunda de $z = f(x, y)$ con respecto a y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right] = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = f_{yy}$$

- Derivada cruzada de $z = f(x, y)$ con respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right] = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = f_{yx}$$

- Derivada cruzada de $z = f(x, y)$ con respecto a y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = f_{xy}$$

De la misma manera para las derivadas terceras:

- Derivada tercera de $z = f(x, y)$ con respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3} = f_{xxx}$$

- Derivada tercera cruzada de $z = f(x, y)$ con respecto a y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y} = f_{xxy}$$

Y así sucesivamente. Más adelante se verá en el Teorema 2.5 denominado **Teorema de Clairaut** que si se cumplen ciertas condiciones, las derivadas cruzadas serán iguales.

2.9. Incremento de una función

Definición 2.15. Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables, $\mathbf{x} = (x, y)$ y $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$ dos puntos pertenecientes a su dominio, se define como **incremento de una función** a la expresión

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

siendo $x = x_0 + \Delta x$ y $y = y_0 + \Delta y$.

Se intentará relacionar el incremento Δz con los incrementos de las variables independientes. Para ello se utiliza el teorema del valor medio, el cual se presentará para una función de una sola variable y luego se extenderá a funciones de dos variables.

2.9.1. Teorema del valor medio para funciones de una variable

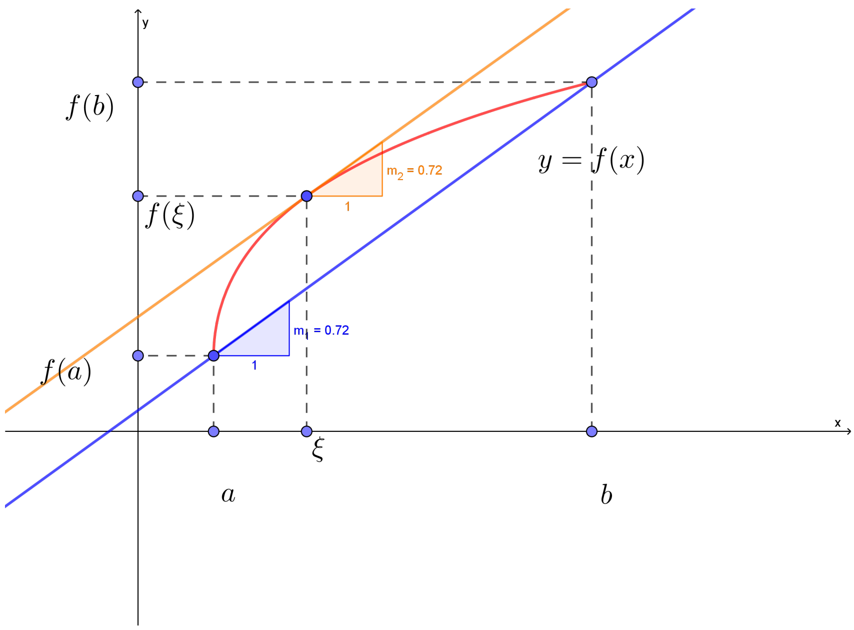


Figura 2.13: Teorema del valor medio

Teorema 2.1. *Sea $y = f(x)$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe un valor $\xi \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

con $\xi = a + \theta(b - a)$ y $0 < \theta < 1$. Llamando $\Delta x = b - a$ y $\Delta f = f(b) - f(a)$, la expresión del teorema del valor medio resulta:

$$\Delta f = f'(\xi)\Delta x \rightarrow \Delta f = f(a + \Delta x) - f(a) = f'(a + \theta\Delta x)\Delta x$$

Con lo cual, se obtuvo lo buscado, que era una expresión que relacionara el incremento de la función con los incrementos de la variable independiente, a través de la derivada. A continuación se extenderá este resultado a funciones de dos variables.

Teorema 2.2. *Sea $z = f(x, y)$ una función continua que admite derivadas parciales en el interior de una región abierta R, que contiene a $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$, entonces es posible escribir para los puntos de R el incremento de la función Δz como:*

$$\Delta z = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)} \Delta x + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0+\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)} \Delta y$$

con $0 < \theta_1 < 1$ y $0 < \theta_2 < 1$.

Demostración: Partiendo de la expresión del incremento de una función de dos variables (Definición 2.15)

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Se suma y resta $f(x_0 + \Delta x, y_0)$

$$\Delta z = [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)] + [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)]$$

Aplicando el Teorema 2.1 a cada uno de los corchetes, se obtiene:

Primer corchete:

$$[f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)] = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)} \Delta x$$

Segundo corchete:

$$[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)] = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0+\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)} \Delta y$$

Sumando las expresiones de los segundos términos, finalmente se obtiene:

$$\Delta z = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0+\theta_1\Delta x, y_0)} \Delta x + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0+\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)} \Delta y$$

la cual se conoce como "**primera fórmula de Lagrange**". Esta expresión no es más que la extensión a dos variables del teorema del valor medio. Analizando la expresión de Δz se observa que la función no tendrá incremento alguno ($\Delta z = 0$) si ambas derivadas parciales son cero simultáneamente. Este concepto se utilizará en la Sección 5.

Recordemos que: en una variable la existencia de la derivada finita implica continuidad. Sin embargo en funciones de dos o más variables no basta la existencia de las derivadas primeras para asegurar la continuidad de la función. Por esta razón, del Teorema 2.2 se desprende el siguiente corolario: Si $z = f(x, y)$ admite derivadas parciales continuas en una región abierta R, entonces la función es continua (Ver Definición 2.12) en todo punto de R.

2.10. Función diferenciable

Definición 2.16. Una función dada por $z = f(x, y)$ es **diferenciable** en $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$ si existe un entorno $U(\mathbf{x_0}, \delta)$ tal que para todo punto $\mathbf{x} = (x, y) \in U(\mathbf{x_0}, \delta)$, el incremento de la función Δz pueda escribirse como:

$$\Delta z = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \Delta x + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

donde $\epsilon_1 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\epsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta y \to 0$, es decir son infinitésimos en el punto $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$ siempre que existan las derivadas parciales $\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ y $\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$. Además, los infinitésimos (vea la Definición 2.13) pueden expresarse como:

$$O(\rho) = \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

con $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Por lo tanto, el incremento Δz puede escribirse como:

$$\Delta z = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \Delta x + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \Delta y + O(\rho)$$

Escrito de esa manera, el incremento Δz de una función diferenciable $f(x, y)$ puede expresarse como una **combinación lineal** de los incrementos de sus variables independientes más un cierto infinitésimo $O(\rho)$. Además puede decirse que una función $f(x, y)$ es diferenciable en una región R si es diferenciable en todos los puntos que pertenecen a R. Existe un lema de funciones diferenciables que afirma:

"Toda función diferenciable es continua y derivable, pero no todas las funciones continuas y derivables son diferenciables."

Gracias a este lema basta con asegurar que la función es diferenciable, para garantizar que sea continua y derivable. Es una condición mucho más fuerte que la derivabilidad vista en Cálculo I. Ahora surge la siguiente pregunta: ¿Cómo asegurar que la función $f(x, y)$ es diferenciable?

Para responder a esta pregunta, es necesario cumplir la **condición suficiente de diferenciabilidad**, a través del siguiente teorema:

Teorema 2.3. *Si $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas en todos los puntos de una región abierta R, entonces será diferenciable en dichos puntos.*

Demostración:

De la expresión dada por el Teorema 2.2 (o primer fórmula de Lagrange), se tiene:

$$\Delta z = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0+\theta_1\Delta x,y_0)} \Delta x + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0+\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)} \Delta y$$

Como las derivadas parciales son continuas en todos los puntos de una región R (vea la Definición 2.12):

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0+\theta_1\Delta x,y_0)} \Delta x = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$$
$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0+\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)} \Delta y = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$$

Por el lema visto en la Definición 2.15, el cual enuncia que una función difiere del límite en un infinitésimo:

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0+\theta_1\Delta x,y_0)} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} + \epsilon_1$$
$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0+\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} + \epsilon_2$$

Reemplazando estas dos ecuaciones en la expresión del incremento:

$$\Delta z = \left[\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} + \epsilon_1\right]\Delta x + \left[\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} + \epsilon_2\right]\Delta y$$

Aplicando propiedad distributiva y reorganizando:

$$\Delta z = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \Delta x + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

Con lo cual, se obtiene la expresión correspondiente a la Definición 2.16.

2.11. Diferencial de una función

Partiendo de la expresión de función diferenciable en dos variables (Definición 2.16), $\Delta z = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \Delta x + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \Delta y + O(\rho)$,

Definición 2.17. Se define **diferencial de la función** a la parte principal del incremento de una función diferenciable en un punto genérico $\mathbf{x} = (x, y)$ y se denota como:

$$df(x,y) = dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$$

Esto significa que $\Delta z = dz + O(\rho)$, es decir que $\Delta z \approx dz$.

Por otra parte, al ser variables independientes $\Delta x = dx$ y $\Delta y = dy$, por lo que la expresión del diferencial dz puede escribirse como:

$$df(x,y) = dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

La expresión $\Delta z \approx dz$ solamente es válida en el entorno del punto $\mathbf{x}$.

El diferencial supone una **aproximación lineal** o de **primer orden** a la función, a partir del punto $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$ a partir del cual es calculado. Esto es fácil de verificar haciendo $dx = x - x_0$ y $dy = y - y_0$.

En la Sección 4 se verá que el diferencial corresponde al primer término de la serie de Taylor.

Ejemplo 2.4. Calcular el diferencial dz y el incremento Δz para la función $z = f(x, y) = 4 - x^2 - \dfrac{y^2}{4}$ en el punto $\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ considerando los incrementos $\Delta x = \dfrac{1}{2}$ y $\Delta y = 1$.

El diferencial $dz = df$ se calcula como:

$$df(x,y) = dz = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y \rightarrow dz = -2x\Delta x - \frac{1}{2}y\Delta y$$

Por otro lado, de la Definición 2.15 se sabe que el incremento de una función de dos variables es:

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) \rightarrow \Delta z = 4-(x_0+\Delta x)^2 - \frac{(y_0+\Delta y)^2}{4} - \left(4 - x_0^2 - \frac{y_0^2}{4}\right)$$

Operando y desarrollando los cuadrados de los binomios:

$$\Delta z = -(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x_0^2) - \frac{1}{4}(y_0^2 + 2y_0\Delta y + \Delta y^2) + x_0^2 + \frac{y_0^2}{4}$$

Se obtiene finalmente:

$$\Delta z = \underbrace{-2x_0\Delta x - \frac{1}{2}y_0\Delta y}_{dz}\underbrace{-\Delta x^2 - \frac{1}{4}\Delta y^2}_{O(\rho^2)}$$

En esta expresión se observa claramente que el incremento de la función Δz es igual al diferencial dz más el infinitésimo $O(\rho^2)$. Ambas cantidades serán más parecidas cuanto más pequeños sean los incrementos. Caso contrario, serán absolutamente diferentes. El diferencial es una aproximación de primer orden (lineal) a la función en el entorno de un punto. La comparación entre diferencial e incremento es:

$$dz = -2\frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}1 = -1$$

El incremento es:

$$\Delta z = -2\frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{2}1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}1^2 = -1.5$$

El error cometido es considerable porque el tamaño de los incrementos es grande. Intente calcular ambas cantidades con los incrementos $\Delta x = 0.1$ y $\Delta y = 0.25$ y compare los resultados.

2.11.1. Plano tangente

Cuando se analizaban funciones de una sola variable independiente, a través de la definición de derivada, era posible encontrar la expresión de un vector que fuese tangente a dicha función en el punto donde se estaba analizando. Naturalmente, este vector se encontraba incluido en la recta tangente. Observando la Figura 2.14, se ve claramente que el vector tangente (en azul) se encuentra contenido en la recta tangente (en color naranja).

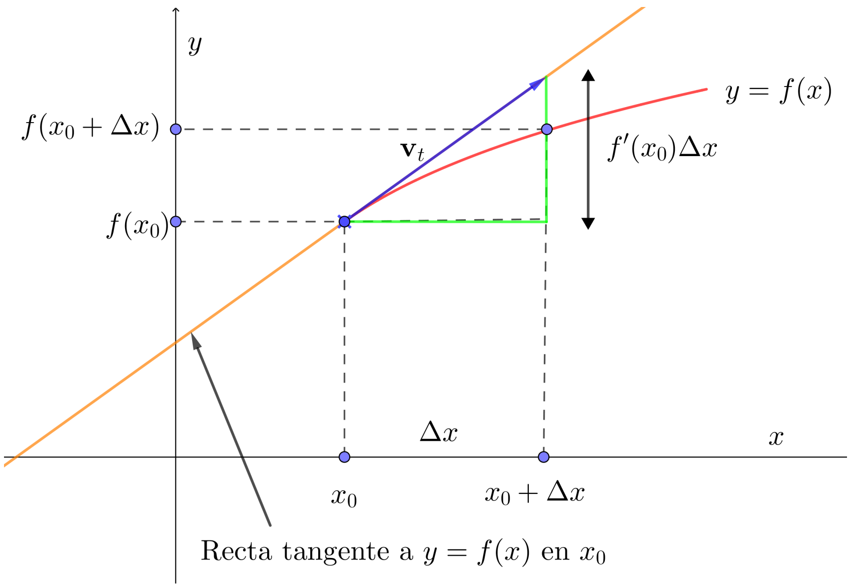


Figura 2.14: Vector tangente en funciones de una variable

Si se adopta un valor igual a Δx para la componente del vector en la dirección x, la componente en la dirección y será igual al valor de la derivada (o pendiente de la recta tangente) en x_0 multiplicado por el incremento Δx. Por lo tanto, el vector tangente $\mathbf{v}_t$ resultará:

$$\mathbf{v}_t = \Delta x\ \mathbf{i} + f'(x_0)\Delta x\ \mathbf{j} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ f'(x_0)\Delta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{bmatrix} \Delta x$$

De manera análoga, para una función de dos variables $z = f(x, y)$, es posible encontrar dos vectores tangentes, linealmente independientes que estarán contenidos en un plano, el cual a su vez, será tangente a la función. Observando las Figuras 2.11a y 2.11b (que representan lo mismo que la Figura 2.14), se tienen los vectores:

$$\mathbf{v_x} = \Delta x\ \mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \Delta x\ \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \end{bmatrix} \Delta x$$

$$\mathbf{v_y} = 0\mathbf{i} + \Delta y\ \mathbf{j} + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \Delta y\ \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \end{bmatrix} \Delta y$$

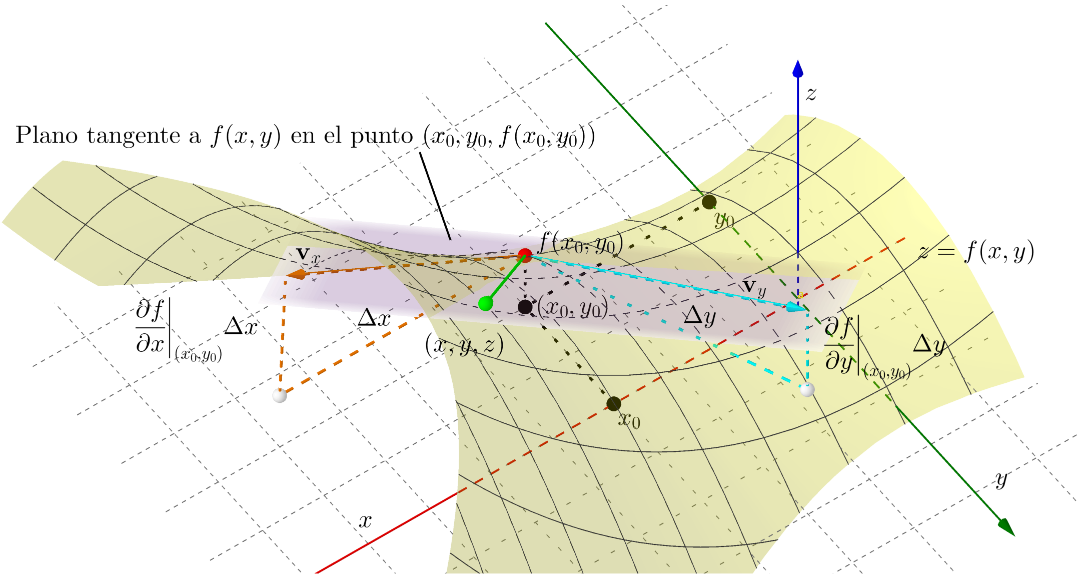


Figura 2.15: Vectores tangentes en funciones de dos variables

De la geometría analítica, se sabe que un plano puede hallarse anulando el siguiente determinante (condición que fuerza a que el punto genérico (x, y, z) pertenezca al plano formado por los vectores tangentes):

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ v_{xx} & v_{xy} & v_{xz} \\ v_{y_x} & v_{y_y} & v_{y_z} \end{vmatrix} = 0$$

siendo (x, y, z) las coordenadas de un punto genérico que pertenece al plano (descrito por el vector en color verde en la Figura 2.15); v_{xx}, v_{xy}, v_{xz} y v_{y_x}, v_{y_y}, v_{y_z} las componentes de los vectores tangentes a la superficie, que también pertenecen al mismo plano; y (x_0, y_0, z_0) es el punto a partir del cual se calculará el plano. Para este caso en particular, el determinante resulta (ver las Ecuaciones de los vectores tangentes):

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \Delta x & 0 & \left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \Delta x \\ 0 & \Delta y & \left.\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \Delta y \end{vmatrix} = 0$$

La resolución de este determinante es:

$$\left[-\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \Delta x \Delta y\right](x-x_0) - \left[\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \Delta x \Delta y\right](y-y_0) + \Delta x \Delta y (z-z_0) = 0$$

Dividiendo todos los términos por el producto $\Delta x \Delta y$ y despejando el término $(z - z_0)$:

$$z - z_0 = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} (x-x_0) + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} (y-y_0)$$

Esta expresión se conoce como **plano tangente** a la función en un punto $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$. El valor de z_0 se obtiene al reemplazar en la función $f(x, y)$ los valores de (x_0, y_0), es decir: $z_0 = f(x_0, y_0)$. Este concepto de plano tangente proviene de la definición de diferencial, ya que si se hace $(x - x_0) = dx$, $(y - y_0) = dy$ y $(z - z_0 = dz)$, se obtiene la expresión anteriormente mencionada (vea la Definición 2.17).

Como se habrá notado, para que exista el plano tangente es condición necesaria y suficiente que la función $f(x, y)$ sea **diferenciable** en el punto $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$.

2.11.2. Recta normal

Para hallar la expresión de la recta normal a la función $z = f(x, y)$ que pasa por el punto $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$ se recurrirá a un teorema de geometría analítica, el cual expresa lo siguiente:

Teorema 2.4. *Si a, b, c y d son constantes y a su vez a, b y c no son simultáneamente nulas, entonces en la expresión genérica de un plano en $\mathbb{R}^3$:*

$$ax + by + cz + d = 0$$

las constantes a, b y c corresponden a las componentes de un vector normal a dicho plano, es decir $\mathbf{n} = a\ \mathbf{i} + b\ \mathbf{j} + c\ \mathbf{k} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

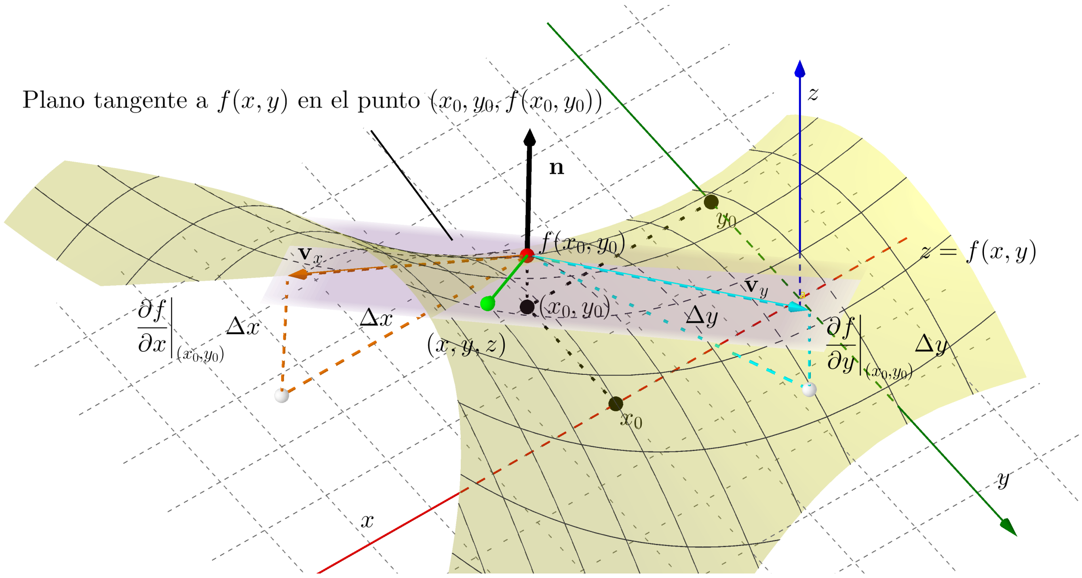


Figura 2.16: Vector normal al plano tangente

Por otra parte, se sabe que para plantear la ecuación vectorial de una recta son necesarios un punto, en este caso $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0, z_0)$, y un vector (el cual se denomina vector director), $\mathbf{n} = [a \quad b \quad c]^T$. Por lo tanto, la ecuación vectorial de la recta es $\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + \lambda \mathbf{n}$. En forma desarrollada:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(a, b, c) \Rightarrow \mathbf{r} : \begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}$$

siendo λ un escalar que cumple $-\infty < \lambda < \infty$. En forma vectorial:

$$\mathbf{r} : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Despejando λ en cada una de las ecuaciones:

$$\mathbf{r} : \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{a} = \lambda \\ \dfrac{y - y_0}{b} = \lambda \\ \dfrac{z - z_0}{c} = \lambda \end{cases}$$

Como λ es el mismo para las tres ecuaciones, es válido escribir:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Observando la expresión del plano tangente determinada en la Sección 2.11.1, es claro que:

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Esta expresión se conoce como **recta normal** a la función en un punto $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$. El valor -1 del denominador de la tercer igualdad se explicará en la Sección 3.1.

Es sencillo notar que para que exista la recta normal a un punto $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$ de la función, es condición necesaria y suficiente que la función $f(x, y)$ sea **diferenciable** en el punto $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$.

2.11.3. Diferenciales sucesivos

Antes de entrar a la definición de los diferenciales sucesivos, es conveniente enunciar el **Teorema de Clairaut**:

Teorema 2.5. *Sea $z = f(x, y)$ una función cuyo dominio abierto se encuentra incluido en $\mathbb{R}^2$. Si existen las segundas derivadas cruzadas y son continuas en el dominio, entonces son iguales:*

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$$

Este Teorema puede generalizarse a n variables independientes.

A partir de ahora, para calcular los diferenciales sucesivos se asumirá que las condiciones del Teorema de Clairaut son satisfechas. En la Sección 2.11, se vio que el diferencial $df(x, y) = dz$ de una función $z = f(x, y)$ es:

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy$$

Ahora se desea calcular el diferencial segundo. Para ello, de manera análoga a lo hecho en la Sección 2.8.3, se calculará el "diferencial del diferencial". Esto es:

$$d^2 f(x,y) = d\left[df(x,y)\right] = d\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy\right]$$

Se puede demostrar que el diferencial es un operador lineal, por esta razón es posible hacer:

$$d^2 f(x,y) = d\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right] dx + d\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right] dy$$

$$d^2 f(x,y) = \left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} dy\right] dx + \left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} dx + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} dy\right] dy$$

Aplicando propiedad distributiva:

$$d^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} dy dx + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} dy^2$$

Teniendo en cuenta la igualdad de las derivadas cruzadas:

$$d^2 f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} dy^2$$

La expresión anterior puede escribirse en forma más compacta como el binomio:

$$d^2f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(x,y)$$

La cual se resuelve como el cuadrado de un binomio, aplicando potencias a los diferenciales y orden de derivación para los símbolos de Jacobi $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ y $\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Notese que la expresión dentro del paréntesis carece de sentido por si sola. Por esta razón debe estar aplicada a una función. Para obtener el diferencial k-ésimo de una función debe desarrollarse, siguiendo las reglas básicas de potencias de binomios, la expresión:

$$d^kf(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^k f(x,y)$$

Esto será posible si y solo si la función es diferenciable hasta el orden k-ésimo en un punto (x, y) considerado.

3. Campos $\mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}^{\mathrm{m}}$

Hasta ahora se ha venido trabajando con campos escalares de variable vectorial (es decir, más de una variable independiente). Se mencionó anteriormente que en los Ejemplos de la Sección 1, los número 4 y 5 no arrojaban como resultado un escalar, sino un vector. Por esta razón, en esta Sección se generalizará el concepto de campo. Se partirá de la expresión de función, definida en un dominio contenido en $\mathbb{R}^n$ e imagen definida en un conjunto incluido en $\mathbb{R}^m$, para distintas combinaciones de los valores m y n, es decir:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

- Si $n = 1$ y $m = 1$ se obtiene:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to y = f(x)$$

  Es decir una función escalar de variable escalar. En esta clasificación entran todas las funciones vistas en Cálculo I. Por ejemplo, la ecuación de una recta $y = ax + b$, con a y b constantes; el volumen de una esfera de radio R: $V = 4/3\pi R^3$, entre otros.
- Si $n = 2$ y $m = 1$:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to z = f(x, y)$$
$$\mathbf{r} = (x, y) \to z = f(\mathbf{r})$$

Esto corresponde a una función escalar de variable vectorial. Son las que se ha venido estudiando en este curso hasta ahora. Son funciones cuyo dominio "vive" en el plano xy y dan como resultado un número. Ejemplos de este tipo de campo son: el área de un rectángulo de base x y altura y, es decir $A = xy$; el período de vibración T de un oscilador de masa x y rigidez y: $T = 2\pi\sqrt{x/y}$, entre otros.

- Si $n = 3$ y $m = 1$:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \to w = f(x, y, z)$$

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \to w = f(\mathbf{r})$$

Este caso, al igual que el anterior, corresponde al de una función escalar de variable vectorial. El dominio de la función $w = f(x, y, z)$ está incluido en $\mathbb{R}^3$ y la imagen es un número real, por lo que se encuentra incluida en $\mathbb{R}$. Ejemplos de estos campos es el volumen de un prisma rectangular, de base x, profundidad y y altura z, es decir: $V = xyz$; la presión atmosférica es función de la altura sobre el nivel del mar, z, la temperatura ambiente, x y la latitud y.

- Si $n = k$ y $m = 1$:

$$f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, ..., x_k) \to w = f(x_1, x_2, ..., x_k)$$

$$\mathbf{r} = (x_1, x_2, ..., x_k) \to w = f(\mathbf{r})$$

Es el caso general de una función escalar de variable vectorial. Se tienen k variables independientes, las cuales a través de la función $w = f(x_1, x_2, ..., x_k)$ arrojan como resultado un escalar, incluido en $\mathbb{R}$. Ejemplos de este tipo de campos son los desplazamientos w de una losa de material homogéneo y elástico, cuyo parámetro descriptivo es E, de su espesor h, cargada uniformemente según q y apoyada según d.

- Si $n = 1$ y $m > 1$:

$$\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$$

$$x \to \mathbf{f} = \mathbf{f}(x) = f_1(x)\mathbf{e_1} + ... + f_m(x)\mathbf{e_m}$$

En forma vectorial:

$$\mathbf{f}(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix}$$

Este tipo de campos se denominan **campos vectoriales**. En este caso particular, se trata de un campo vectorial de variable escalar. La función vectorial $\mathbf{f}(x)$ hace corresponder a cada valor x un vector de m componentes. Un ejemplo de este tipo de campos es, en Física, el tiro parabólico. A cada instante de tiempo t le corresponde un vector de velocidad $\mathbf{v}$, el cual puede descomponerse en dos direcciones, es decir $\mathbf{v}(t) = v_x(t)\mathbf{i} + v_y(t)\mathbf{j}$.

- Si $n > 1$ y $m > 1$:

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \to \mathbf{f} = \mathbf{f}(x_1, x_2, ..., x_n) = f_1(x_1, x_2, ..., x_n)\mathbf{e_1} + ... + f_m(x_1, x_2, ..., x_n)\mathbf{e_m}$$

$$\mathbf{r} = (x_1, x_2, ..., x_n) \to \mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r}) = f_1(\mathbf{r})\mathbf{e_1} + ... + f_m(\mathbf{r})\mathbf{e_m}$$

En forma vectorial:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{r}) \\ f_2(\mathbf{r}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{r}) \end{bmatrix} \quad \text{con } \mathbf{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

En este caso, se trata de un campo vectorial de variable vectorial. El dominio del campo se encuentra incluido en $\mathbb{R}^n$, mientras que la función $\mathbf{f}$ genera un vector de m componentes. Ejemplos de este tipo de campos son el campo gradiente, el campo rotacional (que se verá más adelante en la materia), el campo gravitatorio, el campo eléctrico, entre otros. Este tipo de campo son los más utilizados en Física.

3.1. Vector gradiente

Definición 3.1. Dado un campo escalar $z = f(x, y)$, diferenciable en $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$, se define como **gradiente** de f en el punto $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$ al vector

$$\text{grad } f = \nabla f(\mathbf{x_0}) = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \mathbf{i} + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \mathbf{j} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)}$$

En el caso que el campo escalar $u = u(x_1, ..., x_n)$ tenga n variables independientes, el gradiente en el punto $\mathbf{x_0} = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ será:

$$\text{grad } u = \nabla u(\mathbf{x_0}) = \left.\frac{\partial u(x_1, ..., x_n)}{\partial x_1}\right|_{(x_{10},...,x_{n0})} \mathbf{e_1} + ... + \left.\frac{\partial u(x_1, ..., x_n)}{\partial x_n}\right|_{(x_{10},...,x_{n0})} \mathbf{e_n}$$

En forma vectorial:

$$\text{grad } u = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u(x_1, ..., x_n)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u(x_1, ..., x_n)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial u(x_1, ..., x_n)}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(x_{10},...,x_{n0})}$$

Donde ∇ se denomina **operador Nabla** y es un pseudovector, cuya expresión en $\mathbb{R}^2$ es:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Mientras que en $\mathbb{R}^3$:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

En $\mathbb{R}^n$:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{e_1} + ... + \frac{\partial}{\partial x_n}\mathbf{e_n} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Debido a que se trata de un pseudovector, si no está aplicado a alguna función (escalar o vectorial) carece de sentido.

El vector gradiente cumple con ciertas propiedades, de las cuales se demostrarán sólo algunas:

- Apunta en la dirección en la que crece la función. La verificación de esta propiedad puede realizarse si se calcula el gradiente sobre un mapa de contorno como el mostrado en la Figura 2.4. El vector siempre apuntará en la dirección donde los valores de z son mayores. En la Sección 3.2.3 se verá por que ocurre esto.

- Su dirección es perpendicular a la función $z = f(x, y)$ en un punto $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$. Para mostrar esta propiedad, el gradiente se calculará con la función en su forma implícita. Esto es: $z = f(x_0, y_0) \to f(x_0, y_0) - z = 0$. Por lo tanto:

$$\nabla[f(x_0, y_0) - z] = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \mathbf{i} + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \mathbf{j} - 1\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \\ -1 \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)}$$

  Por el Teorema 2.4 se verifica que las componentes del vector gradiente son las del vector normal al plano tangente y por lo tanto a la función en el punto $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$. Notese además que las componentes corresponden a los coeficientes directores de la recta normal, vista en la Sección 2.11.2, donde se explica la razón del -1 en el denominador de la tercer igualdad.

- El vector gradiente es perpendicular a las curvas de nivel. Esto se enuncia y demuestra como el siguiente teorema:

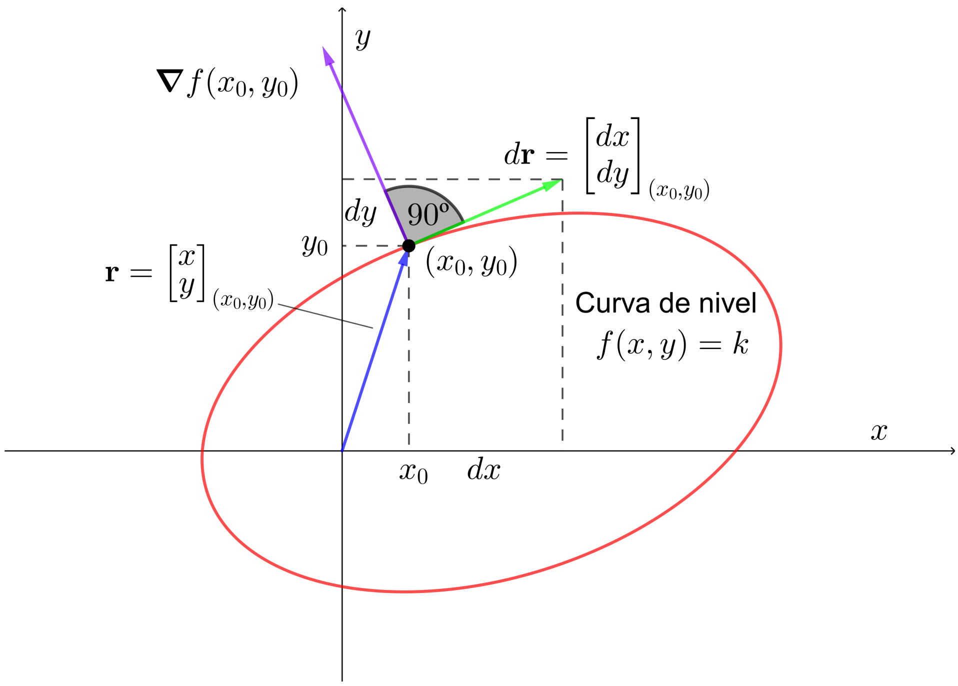


Figura 3.1: Gradiente perpendicular a la curva de nivel

Teorema 3.1. *Sea $z = f(x, y)$ una función escalar de dos variables, $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$ un punto que pertenece a la curva de nivel, definida como $f(x, y) = k$, siendo k una constante (vea la Figura 3.1). Entonces $\nabla f(x_0, y_0)$ es perpendicular a la curva de nivel, siempre que el gradiente exista.*

Demostración: Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ un vector que describe todos los puntos de la curva de nivel. El vector tangente a la curva de nivel se obtiene derivando las componentes de $\mathbf{r}$: $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$. Por otro lado, la expresión de la curva de nivel es $f(x, y) = k$. Diferenciando ambos miembros y recordando la definición del diferencial de una función de dos variables en un punto (x_0, y_0) (Definición 2.17) se tiene:

$$dz = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} dx + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} dy = 0$$

La igualación a cero se debe a que la derivada de una constante k es igual a cero. Por lo tanto, si se piensa al diferencial como el producto escalar de dos vectores:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)} \begin{bmatrix} dx \\ \\ dy \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)} = 0$$

$$\nabla f(x_0, y_0)^T d\mathbf{r} = 0$$

3.2. Derivada direccional

Definición 3.2. Sea $z = f(x, y)$ un campo escalar con dominio incluido en $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$ un punto interior al dominio, h un escalar que pertenece a $\mathbb{R}$ y $\mathbf{v}$ un vector cualquiera que pertenece a $\mathbb{R}^2$, se define **derivada direccional de** $f(x, y)$ **con respecto al vector v en el punto** $\mathbf{x_0}$ a la expresión:

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x_0}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x_0} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x_0})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv_x, y_0 + hv_y) - f(x_0, y_0)}{h},$$

siempre que el límite exista.

En la Sección 2.8 se definieron las derivadas parciales con respecto a x o y como el límite del cociente incremental de **una sola variable incrementada** cuando dicho incremento Δx o Δy tendía a cero. Estas derivadas podrían pensarse como una derivada direccional con el vector $\mathbf{v} = (1, 0)$ y $h = \Delta x$ para la parcial con respecto a x; y con el vector $\mathbf{v} = (0, 1)$ y $h = \Delta y$ para la parcial con respecto a y. De esta manera, se puede concluir que las derivadas parciales son un caso particular de las derivadas direccionales.

3.2.1. Significado geométrico de la derivada direccional

En la Figura 3.2 se observa que a medida que h tiende a cero, la recta de color azul se vuelve tangente a la curva roja en el punto $z = f(x_0, y_0)$. Esta curva ha sido generada como la intersección entre la función $z = f(x, y)$ y un plano π con una inclinación θ con respecto al eje x, misma inclinación que el vector $\mathbf{v}$.

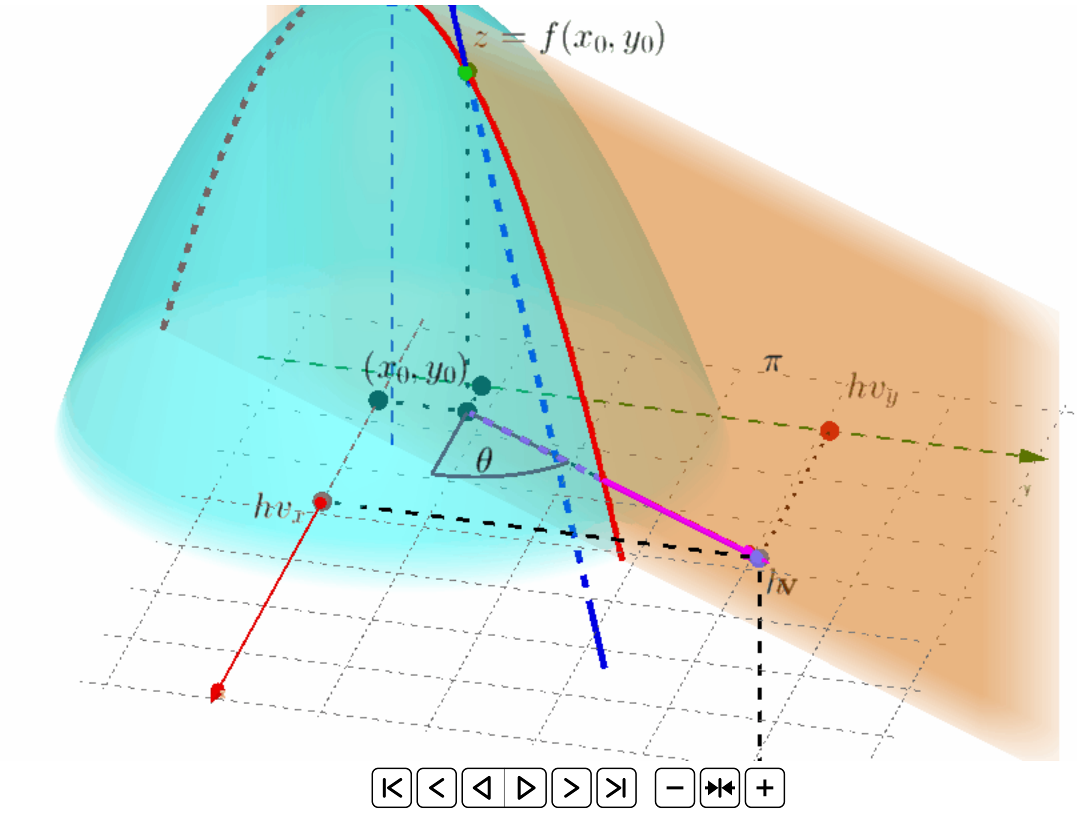


Figura 3.2: Derivada direccional con $\theta = \pi/4 = 90°$

Por lo tanto, se podría concluir que la derivada direccional representa **la pendiente de la recta tangente en $z = f(x_0, y_0)$ a la curva generada por la intersección entre la función $z = f(x, y)$ y un plano π que contiene al vector v**. Por simpleza, en este curso se considerará el módulo de **v** igual a uno.

3.2.2. Derivada direccional de una función diferenciable

Hasta el momento se ha definido la derivada direccional de una función cualquiera. Ahora se verá cómo se calcula una derivada direccional de una función diferenciable. De acuerdo a lo expresado en la Sección 2.10, una función diferenciable es aquella cuyo incremento Δz puede escribirse como una combinación lineal de los incrementos de las variables independientes, más un infinitésimo de orden superior (vea la Sección 2.7):

$$\Delta z = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \Delta x + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \Delta y + O(\rho)$$

De la Figura 3.3 es claro que $\Delta x = \rho\ cos(\theta)$ y $\Delta y = \rho\ sen(\theta)$. Reemplazando en la definición de función diferenciable:

$$\Delta z = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \rho\ cos(\theta) + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \rho\ sen(\theta) + O(\rho)$$

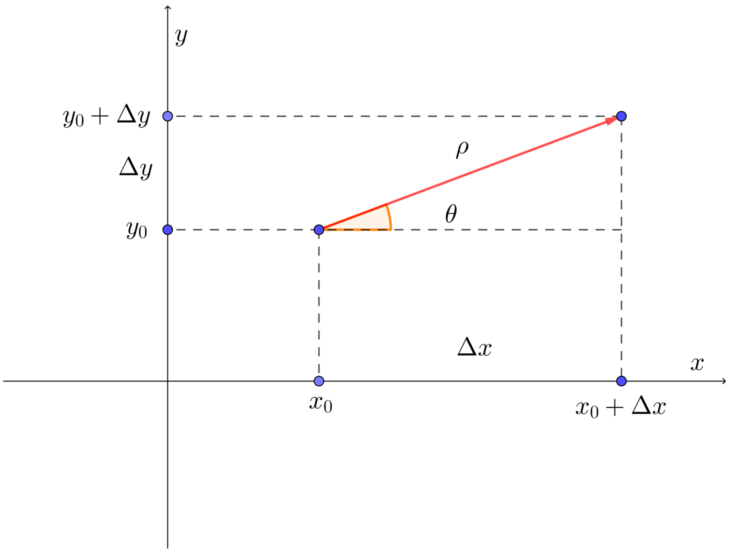


Figura 3.3: Cambio de variables

Se puede demostrar que $\rho = h$ (vea la Figura 3.2), por lo tanto, en la Definición 3.2, se puede reemplazar:

$$D_{\mathbf{v}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + hv_x, y_0 + hv_y) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{\rho \to 0} \frac{f\left[x_0 + \rho\ cos(\theta), y_0 + \rho\ sen(\theta)\right] - f(x_0, y_0)}{\rho},$$

lo que equivale a escribir:

$$D_{\mathbf{v}}f(x_0, y_0) = \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta z}{\rho}$$

Reemplazando la expresión de Δz:

$$D_{\mathbf{v}}f(x_0, y_0) = \lim_{\rho \to 0} \frac{\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \rho\ cos(\theta) + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \rho\ sen(\theta) + O(\rho)}{\rho}$$

Operando, resulta que los dos primeros sumandos no dependen de ρ, por lo tanto:

$$D_{\mathbf{v}}f(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} cos(\theta) + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} sen(\theta) + \lim_{\rho \to 0} \frac{O(\rho)}{\rho}$$

Como $\frac{O(\rho)}{\rho}$ es un infinitésimo, tiende a cero cuando ρ tiende a cero. Por lo tanto, la **derivada direccional de una función diferenciable en un punto** (x_0, y_0) **según un vector** v resulta:

$$D_{\mathbf{v}}f(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} cos(\theta) + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} sen(\theta).$$

La expresión anterior puede considerarse como el producto escalar entre el vector gradiente en el punto (x_0, y_0) y un **vector de norma uno (versor)**, el cual posee una inclinación θ con respecto al eje x:

$$D_{\mathbf{v}}f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) \end{bmatrix}$$

La expresión anterior se puede escribir en forma más compacta como:

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x_0}) = \nabla f(\mathbf{x_0})^T\mathbf{v}$$

Es claro que si el ángulo θ (el cual es medido a partir de la rama positiva del eje x, vea la Figura 3.2 y la Figura 3.3) es nulo (es decir, el versor está incluido en el plano xz, o dicho de otra forma, el versor tiene la misma dirección que el eje x), ocurre lo siguiente:

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x_0}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)} \begin{bmatrix} \cos(0) \\ \operatorname{sen}(0) \end{bmatrix} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$$

De manera análoga, si θ es igual a 90° o $\pi/2$ radianes (coincidente con el eje y):

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x_0}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)} \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) \\ \operatorname{sen}(\pi/2) \end{bmatrix} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$$

Con esto se comprueba lo expresado en la Sección 3.2.2 que las derivadas parciales eran un caso particular de las derivadas direccionales.

Ejemplo 3.1. Calcular la derivada direccional de la función $z = f(x,y) = 2x^2 + y^2$ en el punto $(1,2)$ cuando es intersecada por un plano cuya inclinación es de $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ radianes con respecto al eje x.

Como se trata de una función diferenciable y la dirección del plano está dada como un ángulo medido a partir del eje x, la derivada direccional puede calcularse como:

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x_0}) = \nabla f(\mathbf{x_0})^T\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) \end{bmatrix}$$

El gradiente resulta:

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\partial(2x^2+y^2)}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 4x|_{(1,2)} = 4$$

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\partial(2x^2+y^2)}{\partial y}\right|_{(1,2)} = 2y|_{(1,2)} = 4$$

La derivada direccional es:

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x_0}) = \begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) \end{bmatrix} = 4\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\frac{1}{2} = 2\sqrt{3} + 2$$

3.2.3. Derivada direccional máxima y mínima

En la Sección 3.2.2 se vió que la derivada direccional podía resolverse como el producto escalar entre dos vectores: el gradiente y un vector de norma uno que indicaba la dirección del plano con el que se cortaba la función para así generar la curva y encontrar la pendiente de la recta tangente en un punto $z = f(x_0, y_0)$.

Existe una segunda manera de calcular el producto escalar entre dos vectores **a** y **b**, y es la siguiente:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T\ \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos(\alpha)$$

siendo $\| \bullet \|$ el módulo del vector $\bullet$ y α el ángulo comprendido entre ellos (no confundir con el ángulo θ que se encontraba referido al eje x).

De esta manera, la derivada direccional puede calcularse de esta forma:

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x_0}) = \|\nabla f(\mathbf{x_0})\| \|\mathbf{v}\| \cos(\alpha)$$

como el módulo del vector **v** es uno, el valor máximo o mínimo de la derivada direccional dependerá del ángulo α con el que se evalúe. De esta manera, si $\alpha = 0$ es decir, se evalúa la derivada direccional en la misma dirección del gradiente, esta será **máxima** y tendrá como **valor el módulo del gradiente en el punto** (x_0, y_0):

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x_0})_{max} = \|\nabla f(\mathbf{x_0})\| \cos(0) = \sqrt{\left[\left. \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right|_{(x_0,y_0)} \right]^2 + \left[\left. \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right|_{(x_0,y_0)} \right]^2}$$

Análogamente, si $\alpha = \pi$ es decir, se evalúa la derivada direccional en la dirección opuesta al gradiente, esta será **mínima** y tendrá como **valor el módulo negativo del gradiente en el punto** (x_0, y_0):

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x_0})_{min} = \|\nabla f(\mathbf{x_0})\| \cos(\pi) = -\sqrt{\left[\left. \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \right|_{(x_0,y_0)} \right]^2 + \left[\left. \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right|_{(x_0,y_0)} \right]^2}$$

Con esto se muestra lo enunciado como propiedad del gradiente en la Sección 3.1 (la función crece en la dirección y sentido del gradiente).

3.3. Funciones compuestas

3.3.1. Funciones compuestas de una variable independiente

Se denomina **función compuesta de una variable independiente** a una función $z = f(x, y)$ con $x = x(t)$ y $y = y(t)$, lo que es equivalente a $z = f[x(t), y(t)]$. Es decir que z depende (a través de f) de la variable t.

Esto podría interpretarse de la siguiente manera (observe la Figura 3.4): t es un parámetro que mapea pares de valores x y y a través de las funciones $x = x(t)$ y $y = y(t)$ en el plano xy. A su vez, la función f toma ese par de valores mapeados en el plano xy y les asigna una altura $z = f(x, y)$ a cada par.

Debido a que la variable de este campo escalar f es de tipo vectorial, la función compuesta puede escribirse como:

$$z = f(x, y) = f[x(t), y(t)] = f[\mathbf{r}(t)]$$

con $\mathbf{r}(t) = (x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

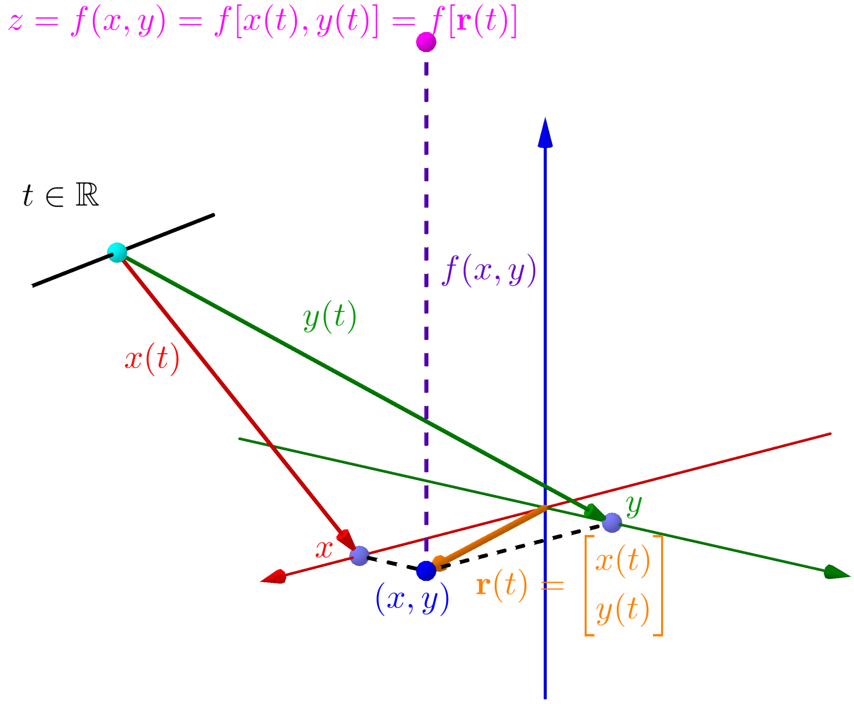


Figura 3.4: Interpretación de función compuesta de una variable independiente (t)

La función compuesta puede generalizarse para n variables independientes $x_1, x_2, ..., x_n$ con $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), ..., x_n = x_n(t)$, las cuales pueden agruparse en un vector $\mathbf{r} = x_1\mathbf{e_1} + ... + x_n\mathbf{e_n} = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T$.

Ejemplo 3.2. Dadas $x = \cos(t)$, $y = \text{sen}(t)$ y $z = 0.05t^2$, graficar la función $h = f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + z$. Hacer variar t entre: $-2\pi \leq t \leq 2\pi$.

Es claro que puede expresarse h como una función del parámetro escalar t, reemplazando x, y, z en h:

$$h(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + z \rightarrow h(t) = \sqrt{\cos^2(t) + \text{sen}^2(t)} + 0.05t^2$$

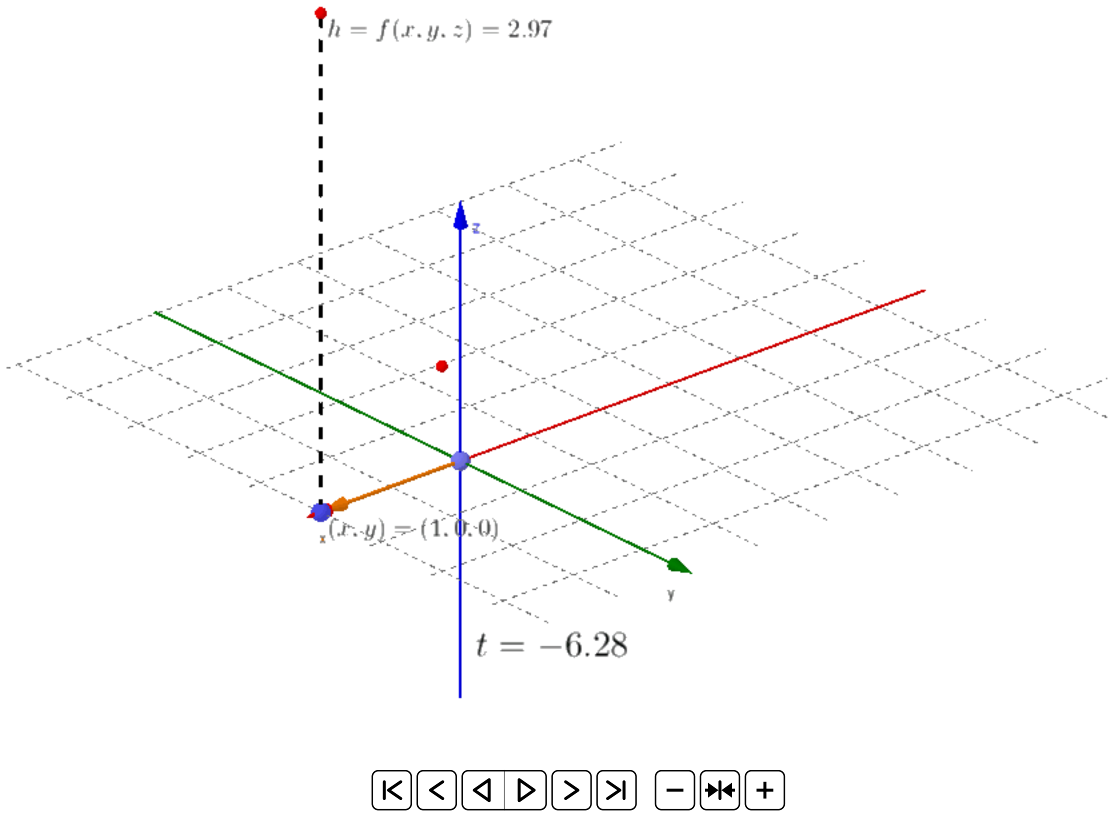


Figura 3.5: Función $h = f(x, y, z)$

3.3.2. Derivada de funciones compuestas de una variable independiente

Para calcular la derivada de una función compuesta se hace uso de la denominada **regla de la cadena**, la cual es una extensión de la vista en Cálculo I. Pero para hallar la expresión se enuncia el siguiente teorema:

Teorema 3.2. *Sea $z = f(x, y)$ una función* **diferenciable en** (x_0, y_0), *y las funciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$* **derivables en** t_0. *Entonces la función $z = f(x, y)$ es* **derivable en** t_0 *y su expresión es:*

$$\frac{dz}{dt} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t_0} + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t_0}$$

Demostración:

Por hipótesis, $z = f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) (vea la Definición 2.16), por lo tanto:

$$\Delta z = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \Delta x + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

Dividiendo la expresión por Δt:

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \epsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Como ϵ_1 y ϵ_2 son infinitésimos en Δx y Δy lo son también en Δt. Esto se comprueba de la siguiente manera: Si $x = x(t)$, el incremento $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$. Ahora si $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$ también. Para Δy es el mismo razonamiento.

Por ello, se toma el límite: $\Delta t \to 0$ y sabiendo por hipótesis que $x = x(t)$ e $y = y(t)$ son derivables en t_0:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\epsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\epsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$\frac{dz}{dt} = \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t_0} + \left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t_0}$$

Tomando $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{bmatrix}\dfrac{dx(t)}{dt} & \dfrac{dy(t)}{dt}\end{bmatrix}^T$ el resultado del teorema puede expresarse en forma vectorial como:

$$\frac{dz}{dt} = \nabla f(\mathbf{x_0})^T\frac{d\mathbf{r}(t_0)}{dt}$$

Es decir:

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\end{bmatrix}_{(x_0,y_0)}\begin{bmatrix}\dfrac{dx(t)}{dt}\\ \dfrac{dy(t)}{dt}\end{bmatrix}_{t_0}$$

En el caso que existan n variables que dependan de t, es decir $f = f[x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)]$ la derivada resulta:

$$\frac{df}{dt} = \nabla f(\mathbf{x_0})^T\frac{d\mathbf{r}(t_0)}{dt} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f(x_1,...,x_n)}{\partial x_n}\end{bmatrix}_{(x_{10},...,x_{n0})}\begin{bmatrix}\dfrac{dx_1(t)}{dt}\\ \vdots \\ \dfrac{dx_n(t)}{dt}\end{bmatrix}_{t_0}$$

Ejemplo 3.3. Dada la función $z = f(x,y) = x^5 - 2x^2y^3$ y a su vez $x(t) = t + 2$; $y(t) = t^3 + 4$, calcular $\dfrac{dz}{dt}$ para $t = 0$.

Por hipótesis del Teorema 3.2, se asume que la función $z = f(x,y)$ es diferenciable en un punto genérico (x,y), por lo tanto se puede calcular el gradiente:

$$\nabla f(x,y) : \begin{cases}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial(x^5 - 2x^2y^3)}{\partial x} = 5x^4 - 4xy^3 \\ \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial(x^5 - 2x^2y^3)}{\partial y} = -6x^2y^2\end{cases} \to \nabla f(x,y) = \begin{bmatrix}5x^4 - 4xy^3\\ -6x^2y^2\end{bmatrix}$$

Por otro lado se calcula el vector $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ como:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} : \begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d(t+2)}{dt} = 1 \\ \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d(t^3+4)}{dt} = 3t^2\end{cases} \to \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \begin{bmatrix}1\\ 3t^2\end{bmatrix}$$

La derivada $\dfrac{dz}{dt}$ se calcula como $\nabla f(x,y)^T \dfrac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$, es decir:

$$\frac{dz}{dt} = \begin{bmatrix} 5x^4 - 4xy^3 & -6x^2y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{bmatrix}$$

O:

$$\frac{dz}{dt} = \left(5x^4 - 4xy^3\right) - \left(6x^2y^2\right) 3t^2$$

Ahora debe reemplazarse en la ecuación anterior x y y por sus respectivas funciones en t:

$$\frac{dz}{dt} = \left[5(t+2)^4 - 4(t+2)(t^3+4)^3\right] - \left[6(t+2)^2(t^3+4)^2\right] 3t^2$$

Observe que la expresión ha quedado completamente en función de t. Resta reemplazar $t = 0$ y así se obtendrá el valor de la derivada:

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0} = \left[5(0+2)^4 - 4(0+2)(0^3+4)^3\right] - \left[6(0+2)^2(0^3+4)^2\right] 3\ 0^2 = -432$$

3.3.3. Derivada de funciones compuestas de varias variables independientes

De manera similar a lo estudiado en la Sección 3.3.2, cuando hay funciones compuestas que dependen de más de una variable independiente, ya no se calculará la derivada total, sino la derivada **parcial** de la función con respecto a cada una de las variables independientes.

Sea $z = f(u,v,w)$ diferenciable en (u_0, v_0, w_0) y $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ y $w = w(x,y)$ son funciones diferenciables en (x_0, y_0), con $\mathbf{r}(x,y) = u(x,y)\mathbf{e_1} + v(x,y)\mathbf{e_2} + w(x,y)\mathbf{e_3} = [u(x,y) \quad v(x,y) \quad w(x,y)]^T$. Siguiendo un razonamiento análogo al descrito en la Sección 3.3.2, se necesita conocer $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\mathbf{e_1} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\mathbf{e_2} + \frac{\partial w(x,y)}{\partial x}\mathbf{e_3}$$

Por otra parte, se tiene:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\mathbf{e_1} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\mathbf{e_2} + \frac{\partial w(x,y)}{\partial y}\mathbf{e_3}$$

Si se aplica el Teorema 3.2, se obtiene:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(u,v,w)}{\partial u}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(u,v,w)}{\partial v}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(u,v,w)}{\partial w}\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(u,v,w)}{\partial u}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial f(u,v,w)}{\partial v}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial f(u,v,w)}{\partial w}\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}$$

Lo que escrito en forma matricial resulta:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(u,v,w)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(u,v,w)}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(u,v,w)}{\partial u} & \dfrac{\partial f(u,v,w)}{\partial v} & \dfrac{\partial f(u,v,w)}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial w(x,y)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Si se tuviese una función de n variables, la forma de proceder es análoga a la vista.

3.4. Derivada de funciones implícitas

Definición 3.3. Una función de la forma $F(x,y) = 0$ define implícitamente a y como una función diferenciable de x es decir $y = f(x)$, de tal manera que se verifique $F(x, f(x)) = 0$ para cualquier x que pertenezca al dominio de f.

Ejemplo 3.4. Sea $F(x,y) = x^2 + y + 10 = 0$. De aquí puede despejarse y como función de x de la siguiente manera:

$$y = x^2 - 10$$

Con lo que se asegura que existe $y = f(x)$.

Como se verá en el siguiente ejemplo, no siempre es posible (o sencillo) encontrar la expresión $y = f(x)$ para todos los puntos del dominio, sino que puede existir solamente en forma local.

Ejemplo 3.5. Sea $F(x,y) = x^2 + y^2 + 2 = 0$. Para que exista $y = f(x)$ debe verificarse lo siguiente:

$$F[x, f(x)] = x^2 + f(x)^2 + 2 = 0 \rightarrow x^2 + f(x)^2 = -2$$

Esto es una incoherencia, debido a que la suma de dos cantidades elevadas al cuadrado no pueden dar como resultado un número negativo (no en el campo de los números Reales). Por lo tanto, se concluye que para este ejemplo no existe $y = f(x)$

A continuación se enunciará el **teorema de la función implícita** el cual brinda las condiciones suficientes para asegurar que la función $y = f(x)$ existe en determinado entorno de un punto y además, sin conocer su expresión, permite obtener la derivada de esta función explícita, es decir $\dfrac{dy}{dx}$.

Teorema 3.3. *Sea $z = F(x,y) = 0$ definida en una región abierta contenida en $\mathbb{R}^2$ y un punto (x_0, y_0) que pertenece a la región abierta. Si se verifica:*

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ *existen y son continuas en $U[(x_0, y_0), \delta]$ incluido en la región abierta.*

3. $\left.\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0$

entonces para todo x que pertenece al intervalo $(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$ existe una función continua y derivable $y = f(x)$ que verifica $F[x, f(x)] = 0$. Además, su derivada en x_0 viene dada por la expresión:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} = -\frac{\left.\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}}{\left.\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}}$$

Este mismo resultado se pudo haber obtenido al aplicar el Teorema 3.2 (teorema de la regla de la cadena) a la expresión $F(x,y) = 0$, asumiendo que se cumplen las condiciones de existencia y unicidad del teorema de función implícita:

Se tiene $F(x,y) = F[x, f(x)]$, es decir que F depende de x y de y, la que a su vez depende de x a través de f. Aplicando la regla de la cadena:

$$\left.\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_o)} + \left.\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_o)} \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} = 0$$

Despejando:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} = -\frac{\left.\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_o)}}{\left.\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_o)}}$$

Si en la tercera condición del Teorema 3.3 se reemplaza $\left.\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0$ por $\left.\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0$, es posible demostrar que $F(x,y) = 0$ define a x como función explícita de y a través de $x = g(y)$.

En el caso que se tengan más de dos variables, el razonamiento es análogo. Para ello se enunciará el **teorema de la función implícita para varias variables**.

Teorema 3.4. *Sea $w = F(x,y,z) = 0$ definida en una región abierta contenida en $\mathbb{R}^3$ y un punto (x_0, y_0, z_0) que pertenece a la región abierta. Si se verifica:*

1. $F(x_0, y_0, z_0) = 0$
2. $\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}, \dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}, \dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}$ *existen y son continuas en $U[(x_0, y_0, z_0), \delta]$ incluido en la región abierta.*
3. $\left.\dfrac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \neq 0$

entonces para todo punto (x,y) que pertenece al entorno $U[(x_0, y_0), \delta]$ existe una función continua y derivable $z = f(x,y)$ que verifica $F[x, y, f(x,y)] = 0$. Además, sus derivadas *parciales en (x_0, y_0) vienen dadas por las expresiones:*

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = -\frac{\left.\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}}{\left.\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0)}}$$

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = -\frac{\left.\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}}{\left.\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0)}}$$

En este caso, se dice que $F(x, y, z) = 0$ define en forma implícita a z como función de x y y a través de $z = f(x, y)$.

Ejemplo 3.6. Calcular $\frac{dy}{dx}$ en el punto $(1, 2)$ sabiendo que $F(x, y) = y^3+y^2-5y-x^2-1 = 0$

Para calcular $\frac{dy}{dx}$, primero deben verificarse las condiciones del Teorema 3.3, el cual asegurará la existencia de una función explícita del tipo $y = f(x)$. Las condiciones son:

1. $F(x_0, y_0) = 0$

$$F(x,y) = y^3 + y^2 - 5y - x^2 - 1 = 2^3 + 2^2 - 5\ 2 - 1^2 - 1 = 0 \rightarrow \text{Verifica}$$

2. $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ y $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ debían existir y ser continuas en el entorno del punto $(1, 2)$:

$$\left.\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\right|_{(1,2)} = -2x = -2 \rightarrow \text{Verifica}$$

$$\left.\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right|_{(1,2)} = 3y^2 + 2y - 5 = 11 \rightarrow \text{Verifica}$$

3. La tercera y última condición era que $\left.\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right|_{(1,2)}$ debía ser distinta de cero, lo cual se comprobó en el ítem anterior, ya que vale 11

Con las 3 condiciones cumplidas, se puede asegurar que existe la función $y = f(x)$ y que la derivada $\frac{dy}{dx}$ en el punto $(1, 2)$ vale:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,2)} = -\frac{\left.\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\right|_{(1,2)}}{\left.\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right|_{(1,2)}} = \frac{2}{11}$$

4. Desarrollo en series de Taylor

Como la mayoría de los temas tratados hasta ahora, este es una extensión a dos variables del desarrollo en series de Taylor visto en Cálculo I. El mismo consistía en aproximar una función "alrededor" de un punto. A medida que se tomaban derivadas de mayor orden, el error entre la aproximación y la función disminuía. La serie de Taylor para una variable en el punto x_0 es:

$$f(x) = f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_0} (x - x_0)^2 + ... + \frac{1}{n!} \left.\frac{d^n f}{dx^n}\right|_{x_0} (x - x_0)^n + TC$$

Siendo TC (término complementario) cuya expresión es: $\frac{1}{(n+1)!} \left.\frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}\right|_{x_0+\theta h} (x - x_0)^{n+1}$
θ un valor comprendido entre 0 y 1; y h la longitud del entorno (recordar que esta aproximación solamente es válida en el entorno $x_0 - h < x < x_0 + h$). Como se observa, si se requiere hacer el desarrollo hasta la derivada de orden n, es requisito fundamental que la función $y = f(x)$ sea derivable hasta el orden $n + 1$ (esto se debe a la existencia del término complementario).

Ahora se definirá el desarrollo de Taylor para funciones de dos variables.

Definición 4.1. Sea $z = f(x, y)$ una función **diferenciable** hasta el orden $(n + 1)$ inclusive, en un entorno del punto $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$, se puede aproximar la función de dos variables $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ mediante un **polinomio de n-ésimo** grado, en potencias de $\Delta x = x - x_0$ y $\Delta y = y - y_0$, menos un término complementario. Recordando la expresión de los diferenciales sucesivos (Sección 2.11.3), el desarrollo resulta:

$$\begin{gathered} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right) f(x_0, y_0) + \\ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x_0, y_0) + ... + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x_0, y_0) \\ + \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{(n+1)} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) \end{gathered}$$

siendo θ un valor comprendido entre 0 y 1. El término que involucra a la derivada $n + 1$ se conoce como término complementario.

Con esto, quedan claros dos conceptos:

- Este desarrollo es válido solamente en un **entorno** del punto $\mathbf{x_0} = (x_0, y_0)$. Es decir que es válido para $(x, y) \in U[(x_0, y_0), \delta]$.
- Para hallar un polinomio de grado n, es **condición necesaria** que la función sea **diferenciable hasta el orden** $n+1$. Como se explicó antes, esto es por el término

complementario. Por ejemplo, si se requiere hacer una aproximación con un polinomio cuadrático (orden 2), la función **debe ser diferenciable** hasta el orden 3.

Si en la expresión anterior se toma $x = x_0 + \Delta x$ y $y = y_0 + \Delta y$, se puede reescribir como:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \left[\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right] f(x_0,y_0) +$$
$$\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right]^2 f(x_0,y_0) + ... + \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right]^n f(x_0,y_0) +$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right]^{(n+1)} f[x_0+\theta(x-x_0), y_0+\theta(y-y_0)]$$

En el caso de no considerar el término complementario, el polinomio de aproximación deja de ser **igual** para convertirse en **aproximado**:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \left[\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right] f(x_0,y_0) +$$
$$\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right]^2 f(x_0,y_0) + ... + \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right]^n f(x_0,y_0)$$

Además puede escribirse en forma compacta:

$$f(x,y) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)\right]^k f(x_0,y_0)$$

Por ejemplo, si se desarrolla para $n = 3$:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(y-y_0) +$$
$$\frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0)^2 + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0)(y-y_0) + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}(y-y_0)^2\right] +$$
$$+\frac{1}{3!}\left[\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0)^3\right] +$$
$$+\frac{1}{3!}\left[3\left.\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0)^2(y-y_0) + 3\left.\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0)(y-y_0)^2\right] +$$
$$+\frac{1}{3!}\left[\left.\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\right|_{(x_0,y_0)}(y-y_0)^3\right]$$

Ejemplo 4.1. Dada $z = f(x,y) = e^x \cos(x+y)$, hallar el polinomio de Taylor hasta orden 3 y graficar las aproximaciones de primero, segundo y tercer orden en el entorno del punto $(0,1)$.

Las derivadas parciales evaluadas en el punto $(0,1)$ hasta tercer orden resultan:

$$\begin{aligned}
f(x_0,y_0) &= e^x\cos(x+y)|_{(0,1)} = 0.54\\
\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} &= e^x\cos(x+y) - e^x\operatorname{sen}(x+y)|_{(0,1)} = -0.301\\
\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} &= -e^x\operatorname{sen}(x+y)|_{(0,1)} = -0.841\\
\left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} &= -2e^x\operatorname{sen}(x+y)|_{(0,1)} = -1.682\\
\left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} &= -e^x\cos(x+y) - e^x\operatorname{sen}(x+y)|_{(0,1)} = -1.381\\
\left.\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} &= -e^x\cos(x+y)|_{(0,1)} = -0.54\\
\left.\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}\right|_{(x_0,y_0)} &= -2e^x\operatorname{sen}(x+y) - 2e^x\cos(x+y)|_{(0,1)} = -2.763\\
\left.\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} &= -2e^x\cos(x+y)-|_{(0,1)} = -1.080\\
\left.\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^2\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} &= e^x\sin(x+y) - e^x\cos(x+y)|_{(0,1)} = 0.301\\
\left.\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}\right|_{(x_0,y_0)} &= e^x\operatorname{sen}(x+y)|_{(0,1)} = 0.841
\end{aligned}$$

- Aproximación lineal (corresponde al plano tangente visto en la Sección 2.11.1):

$$f(x,y) \approx 0.54 - 0.301x - 0.841(y-1)$$

Trabajando la expresión anterior, el polinomio de primer grado es:

$$f(x,y) \approx -0.301x - 0.841y + 1.381$$

- Aproximación cuadrática (o de segundo orden):

$$\begin{gathered}
f(x,y) \approx 0.54 - 0.301x - 0.841(y-1)+\\
\frac{1}{2!}\left[-1.682x^2 + 2(-1.381)x(y-1) - 0.54(y-1)^2\right]
\end{gathered}$$

Operando, el polinomio de segundo grado resulta:

$$f(x,y) \approx -0.841x^2 - 0.27y^2 - 1.381xy + 1.08x - 0.301y + 1.11$$

- Aproximación cúbica (o de tercer orden):

$$f(x,y) \approx 0.54 - 0.301x - 0.841(y-1)+$$
$$\frac{1}{2!}\left[-1.682x^2 + 2(-1.381)x(y-1) - 0.54(y-1)^2\right]+$$
$$+\frac{1}{3!}\left[-2.763x^3 + 3(-1.080)x^2(y-1) + 3\ \ 0.301x(y-1)^2 + 0.841(y-1)^3\right]$$

Aplicando propiedades distributivas y demás, el polinomio de tercer grado es:

$$f(x,y) \approx -0.4605x^3 + 0.14y^3 - 0.54x^2y + 0.1505xy^2 - 0.301x^2 - 0.6905y^2$$
$$-1.682xy + 1.2305x + 0.1195y + 0.97$$

En la Tabla 4.1 se presenta una comparación entre las diferentes aproximaciones en un entorno del punto donde han sido calculadas. Note que en la última fila, el punto resulta lejano al que se calcularon las aproximaciones, por lo tanto los resultados que arrojan éstas no pueden ser considerados por su baja exactitud.

En la Figura 4.1 se ha graficado la función del ejemplo y las aproximaciones desde orden cero hasta el orden 3 en un entorno del punto $(0,1)$ (representado como el círculo de color rojo en el plano xy).

Punto	Exacta	1er orden	2do orden	3er orden
(0,1)	0.54030231	0.54	0.54	0.54
(0.05,0.99)	0.53217472	0.53336	0.5309235	0.5308825
(0.1,0.9)	0.5971264	0.594	0.59571	0.595835
(0.15,0.85)	0.62774172	0.621	0.6260975	0.6264425
(0.3,0.5)	0.94045569	0.8702	0.93325	0.938939
(-0.1,1.1)	0.48888574	0.486	0.48771	0.487555
(-0.2,1.2)	0.44236211	0.432	0.44184	0.44096
(0.5,0.5)	0.8908079	0.81	0.87675	0.887875
(1,2)	-2.69107861	-0.602	-3.094	-3.806

Tabla 4.1: Comparación entre los distintos grados de polinomios

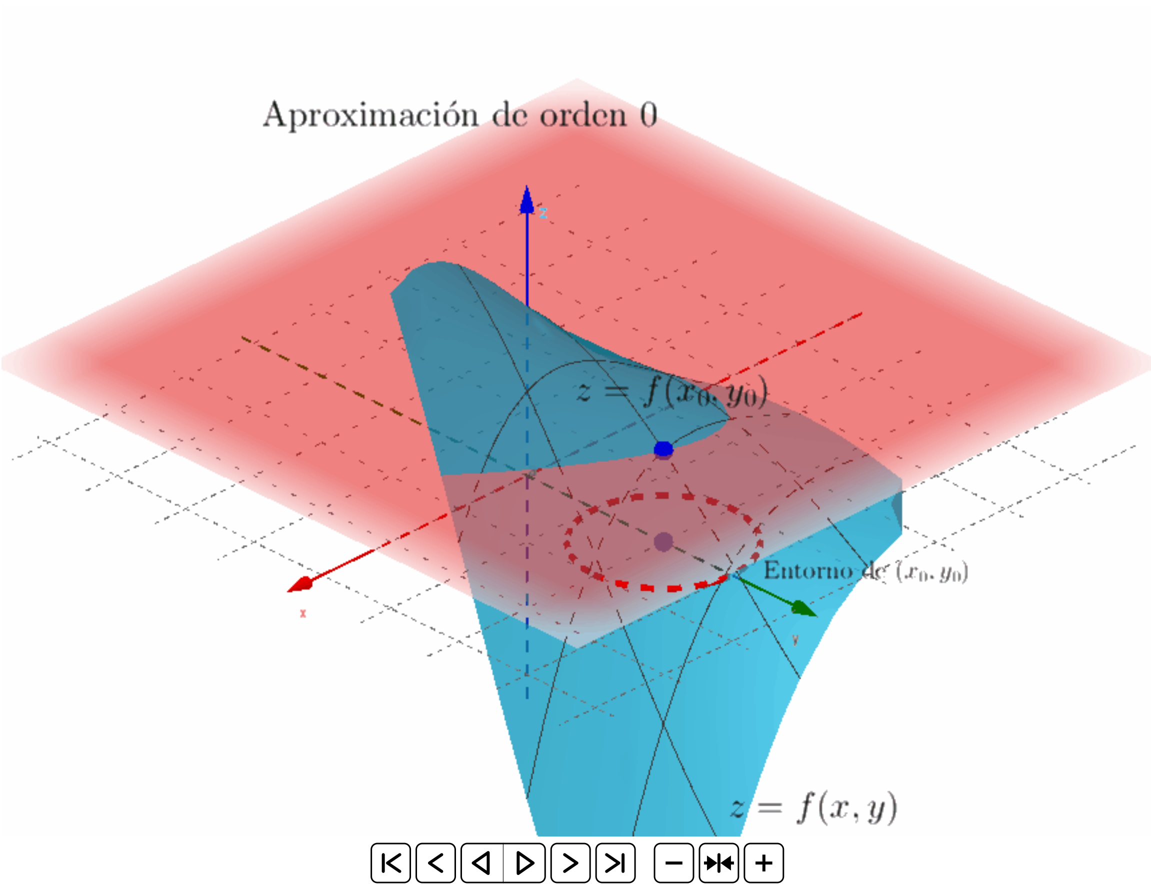


Figura 4.1: Aproximación de Taylor de diferentes órdenes

5. Extremos

5.1. Extremos libres

Uno de los usos de las derivadas es la localización de puntos máximos y mínimos en las funciones. Si bien existen extremos absolutos y relativos (ver la Figura 5.1), en este curso se denotará a todos los extremos como relativos.

Definición 5.1. Sea un campo escalar $f : S \to \mathbb{R}$ con $S \subseteq \mathbb{R}^n$, conjunto cerrado y acotado. Tendrá un máximo o mínimo absoluto en el punto $\mathbf{x_0} = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$ si se cumple para todo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ distintos a $\mathbf{x_0}$ lo siguiente:

- $\forall \mathbf{x} \in S(\mathbf{x} \neq \mathbf{x_0}) : f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x_0})$ **máximo absoluto**
- $\forall \mathbf{x} \in S(\mathbf{x} \neq \mathbf{x_0}) : f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x_0})$ **mínimo absoluto**

Definición 5.2. Sea un campo escalar $f : S \to \mathbb{R}$ con $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Tendrá un máximo o mínimo relativo en el punto $\mathbf{x_0} = (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0n})$ si existe un número $\delta > 0$ tal que para todo $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in U_*(\mathbf{x_0}, \delta)$ se verifica:

- $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x_0})$ **máximo relativo**

- $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x_0})$ **mínimo relativo**

Habiendo definido los puntos extremos, se plantea la siguiente pregunta: ¿Cómo se encuentran? Una vez hallados, ¿cómo saber si se trata de un máximo, un mínimo o ninguno de los dos? Para ello existe la **condición necesaria de existencia de extremos**, la cual se enunciará a continuación.

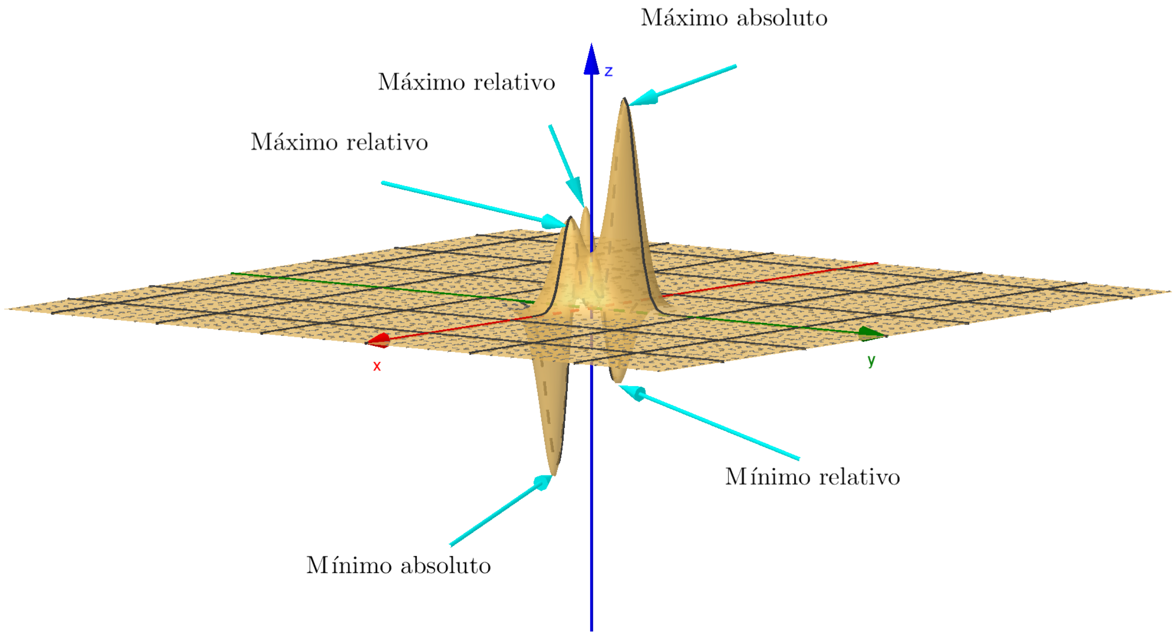


Figura 5.1: Máximos y mínimos relativos y absolutos

Teorema 5.1. *Sea $z = f(x, y)$ función que admite derivadas parciales, (x_0, y_0) un punto interior del dominio de $z = f(x, y)$. La condición necesaria para que la función admita extremos es que se verifique:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Note que esta condición, en funciones diferenciables, equivale a anular el gradiente.

Recordando la Sección 2.11.1, si las derivadas parciales son nulas, el plano tangente se vuelve paralelo al xy, es decir $z = z_0$. Resolviendo el sistema de ecuaciones planteado por la condición necesaria se encuentran las coordenadas de los puntos donde el plano tangente se vuelve paralelo al xy. Estos puntos se denominan **puntos críticos**. No obstante, es posible que los puntos críticos sean máximos, mínimos o puntos de ensilladura. Para clasificarlos, es necesario analizar el signo del incremento de la función, esto es el Δz:

- Si se verifica $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) < f(x_0, y_0) \Rightarrow \Delta z < 0$, se está en presencia de un **máximo**.
- Por otra parte, si ocurre $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) > f(x_0, y_0) \Rightarrow \Delta z > 0$, se está en presencia de un **mínimo**

Existen varias maneras de analizar el signo de Δz. La que se verá a continuación es el análogo de Cálculo I del signo de la derivada segunda.

Teorema 5.2. *Sea* (x_0, y_0) *un* **punto crítico** *de* $z = f(x, y)$ *una función con derivadas parciales primeras y segundas en un entorno de dicho punto, continuas y no simultáneamente nulas en* (x_0, y_0)*, entonces el signo de* Δz *será igual al del diferencial segundo de la función,* $d^2 f(x, y)$*.*

El desarrollo de Taylor para $n = 1$ es:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right) f(x_0, y_0) +$$
$$+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$$

con $0 < \theta < 1$. De acuerdo a la condición necesaria, el término lineal es igual a cero, y por hipótesis se tiene que la continuidad de las derivadas segundas está asegurada:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)$$
$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} + \epsilon_1\right]\Delta x^2 +$$
$$\left[\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x_0,y_0)} + \epsilon_2\right]\Delta x\Delta y + \frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} + \epsilon_3\right]\Delta y^2$$

Los infinitésimos ϵ_1, ϵ_2 y ϵ_3 tienden a cero cuando $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ también lo hace (Vea la Sección 2.10). En este caso, se tiene que

$$O(\rho^2) = \frac{1}{2}\epsilon_1\Delta x^2 + \Delta x\Delta y\epsilon_2 + \frac{1}{2}\Delta y^2\epsilon_3$$

es un infinitésimo de orden superior a ρ^2. Por lo que la expresión del incremento de la función puede escribirse como:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}\Delta x^2 +$$
$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\Delta x\Delta y + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}\Delta y^2 + O(\rho^2)$$

Es decir que el signo del diferencial segundo d^2f es **igual** al de Δz. Por lo tanto, el signo del diferencial segundo se puede analizar a través del **determinante de la matriz Hessiana**. El cual tiene por expresión:

$$\det\left[\mathbf{H}(x_0,y_0)\right] = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} - \left[\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\right]^2 = \left|\begin{matrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{matrix}\right|_{(x_0,y_0)}$$

El determinante Hessiano debe calcularse para cada punto crítico. En función del signo que arroje el determinante, se tendrán tres posibilidades:

- $\det\left[\mathbf{H}(x_0,y_0)\right] > 0$. Esto indica que el punto crítico **presenta un extremo**. Esto implica que las derivadas segundas en el punto con respecto a x y a y tienen el mismo signo. En el entorno del punto crítico la superficie queda situada a un mismo lado del plano tangente: Si la superficie queda por debajo del plano $\left(\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} < 0\right)$ se tendrá un **máximo estricto**; por el contrario, si la función queda por encima del plano tangente $\left(\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} > 0\right)$ se tendrá un **mínimo estricto**.
- $\det\left[\mathbf{H}(x_0,y_0)\right] < 0$. No hay extremo. Se produce el denominado **punto de ensilladura**. La función nunca queda a un solo lado del plano tangente.
- $\det\left[H(x_0,y_0)\right] = 0$. Esto indica que esta metodología no puede aportar información para clasificar el extremo. Es un caso denominado **dudoso**. Para estudiar lo que sucede, debe realizarse un procedimiento ad hoc.

Ejemplo 5.1. Hallar y clasificar (si los hubiere) los extremos de la función $z = f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

Para hallar las coordenadas de los extremos, debe aplicarse la condición necesaria de existencia:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ \\ -3x + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

Dividiendo ambas ecuaciones por 3:

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \quad (1) \\ \\ -x + y^2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

De (1) se obtiene $y = x^2$. Se reemplaza esto en (2):

$$-x + (x^2)^2 = x^4 - x = 0 \rightarrow x(x^3 - 1) = 0$$

Con lo que resultan dos valores posibles de x que satisfacen la igualdad: $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$. Reemplazando estos valores de x en cualquiera de las ecuaciones de la condición necesaria, se obtienen las coordenadas y de los puntos críticos. De esta manera, se obtienen dos puntos críticos (puntos donde se anula el gradiente, pero que no necesariamente son extremos):

- $P_1 = (0, 0)$
- $P_2 = (1, 1)$

Para determinar si los puntos hallados son extremos, se analiza el signo del incremento Δz, a través del signo del diferencial segundo (vea el Teorema 5.2). Para ello, basta con conocer el signo del determinante de la matriz Hessiana:

$$\det\left[\mathbf{H}(x,y)\right] = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ & \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -1 \\ & \\ -1 & 2y \end{vmatrix}$$

Debe evaluarse el determinante para cada punto crítico:

$$\det\left[\mathbf{H}(0,0)\right] = \begin{vmatrix} 2\ 0 & -1 \\ & \\ -1 & 2\ 0 \end{vmatrix} = -1$$

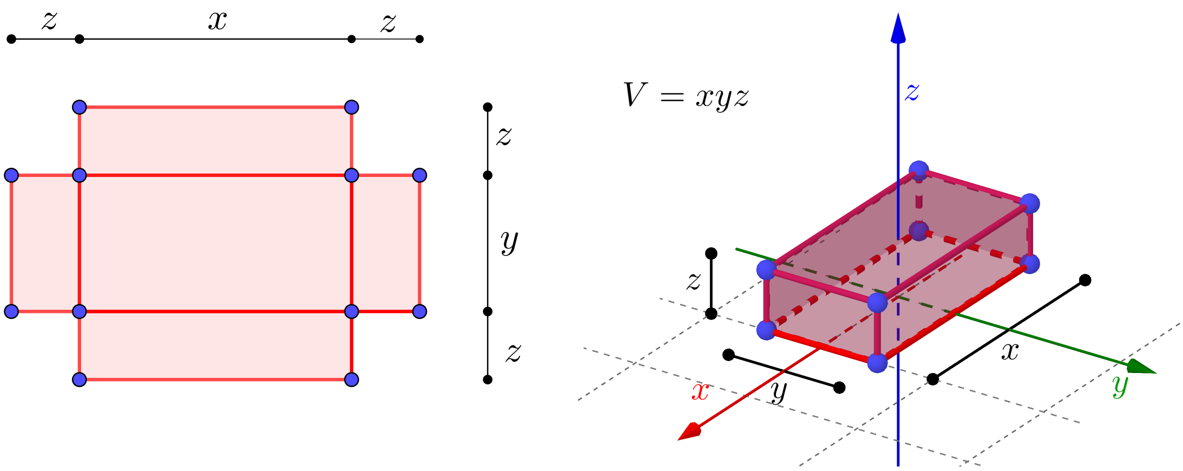
Y para el punto $(1, 1)$:

$$\det\left[\mathbf{H}(1,1)\right] = \begin{vmatrix} 2\ 1 & -1 \\ & \\ -1 & 2\ 1 \end{vmatrix} = 3$$

Lo que importa en estos resultados no es el número, sino el signo. Por lo tanto, se puede decir que en el punto $(0, 0)$ no hay extremo, puesto que el signo del determinante es negativo (es un punto de ensilladura). Por el contrario, en el punto $(1, 1)$ hay extremo, ya que el determinante es positivo. Para determinar si es un máximo o un mínimo debe evaluarse el signo de $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(1,1)} = 2$. Como es positivo, se concluye que el punto $(1, 1, f(1, 1)) = (1, 1, -1)$ hay un mínimo relativo.

5.2. Extremos condicionados

Suponga lo siguiente: partiendo de un trozo de cartón de área A (como el que se observa en la Figura 5.2), se desea encontrar el máximo volumen que es capaz de almacenar sin tener en cuenta la tapa superior. Esto es, la relación entre los lados x, y y z que maximicen la función $V(x, y, z) = xyz$.



Desarrollo de la caja de cartón

Caja armada

Figura 5.2: Descripción del problema

De acuerdo a la Figura 5.2 el área puede calcularse como:

$$A(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy$$

Despejando z de la expresión anterior:

$$z = \frac{A - xy}{2(x + y)} = \varphi(x, y)$$

Por lo que la función volumen resultaría:

$$V[x, y, \varphi(x, y)] = xy\frac{A - xy}{2(x + y)}$$

Operando:

$$V[x, y, \varphi(x, y)] = \frac{Axy - x^2y^2}{2(x + y)}$$

Con el procedimiento anterior, se ha impuesto a la función volumen $V = V(x, y, z)$ una restricción a través del área A. De esta manera, se ha reducido el problema a solamente dos variables. Con esto, se pueden encontrar los extremos de la función volumen aplicando el procedimiento visto en la Subsección 5.1. Para ello, debe aplicarse la condición necesaria de existencia de extremos (vea el Teorema 5.1):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V(x, y)}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial V(x, y)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Encontrando las derivadas parciales y operando se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V(x,y)}{\partial x} = \dfrac{y^2(A-2xy-x^2)}{2(x+y)^2} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial V(x,y)}{\partial y} = \dfrac{x^2(A-2xy-y^2)}{2(x+y)^2} = 0 \end{cases}$$

A simple vista, se observa que una solución del sistema es la trivial. Se descarta esta ya que produciría un volumen nulo de la caja (y además generaría una indeterminación). La otra solución se obtiene al anular simultáneamente los paréntesis en los numeradores:

$$\begin{cases} A-2xy-x^2 = 0 \\ \\ A-2xy-y^2 = 0 \end{cases}$$

Restando miembro a miembro, se obtiene la condición que maximiza el volumen de la caja:

$$x = y$$

Esto implica que la base debe ser cuadrada. La altura de la caja debe ser:

$$z = \varphi(x,y) = \frac{A-x^2}{4x}$$

Por lo que el volumen máximo será:

$$V = \frac{Ax-x^3}{4}$$

La abscisa a la que se produce el volumen máximo, dada un área de cartón A se encuentra como:

$$\frac{dV}{dx} = 0 \rightarrow \frac{A-3x^2}{4} = 0$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática (y considerando únicamente los resultados positivos, ya que no existen volúmenes negativos) se obtiene:

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{1}{3}A}$$

En la Tabla 5.1 se muestran los valores de A y x_{max} que generan volúmenes V máximos.

A	x_{max}	V
0	0	0
1	0.57735027	0.09622504
2	0.81649658	0.27216553
3	1	0.5
4	1.15470054	0.76980036
5	1.29099445	1.07582871
6	1.41421356	1.41421356
7	1.52752523	1.78211277
8	1.63299316	2.17732422
9	1.73205081	2.59807621
10	1.82574186	3.0429031

Tabla 5.1: Valores de A y x_{max} que generan volúmenes máximos

En la Figura 5.3 se observa en línea roja la restricción (área de cartón) y en verde, algunas curvas de nivel de la función Volumen para distintos valores de A. En particular, para $A = 6$ se encontró que el volumen máximo que puede contener dicha caja es de 1.414 y se produce para un valor de lado $x = 1.414$.

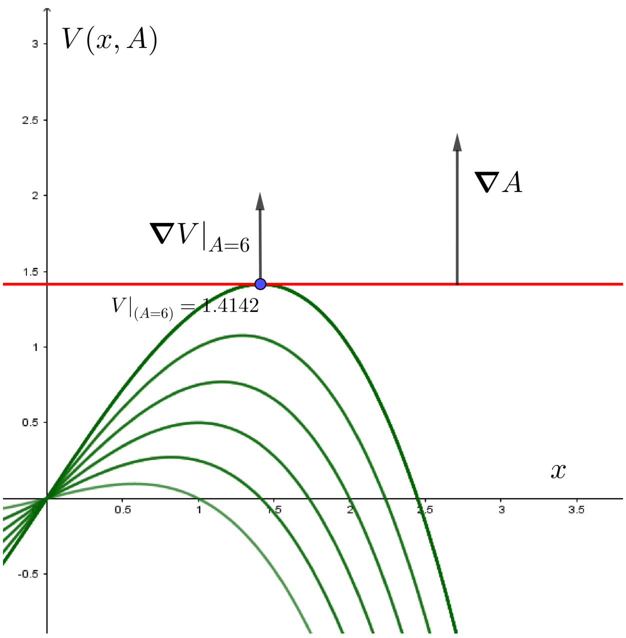


Figura 5.3: Gradientes paralelos

Puede apreciarse además que los gradientes (tanto de la función Volumen como de la restricción de Área) son paralelos donde se produce el máximo volumen. Esta característica posibilita el planteo de un método más general para hallar extremos condicionados.

5.2.1. Método de los multiplicadores de Lagrange

Cuando no es posible despejar (o es extremadamente complicado a pesar de verificarse las condiciones del Teorema 3.4) una variable como función de otras (ver la resolución de la Subsección 5.2) es posible recurrir a los multiplicadores de Lagrange. El método se basa en el paralelismo entre los vectores gradientes de la función a extremar y la condición. El método se presenta a través del siguiente teorema:

Teorema 5.3. *Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones suaves dadas. Sean $\mathbf{x_0} \in U$ y $g(\mathbf{x_0}) = c$, y sea S el conjunto de nivel para g con valor c (conjunto de puntos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ con $g(\mathbf{x}) = c$). Suponga que $\nabla g(\mathbf{x_0}) \neq \mathbf{0}$.*

Si f se encuentra restringida a S, tiene un máximo o un mínimo en S en $\mathbf{x_0}$, entonces existe un número real λ tal que:

$$\nabla f(\mathbf{x_0}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x_0})$$

Nótese que la tesis del Teorema implica el paralelismo (mediante un número λ) entre los gradientes de la función y la condición (vea la Figura 5.3). El número λ se denomina multiplicador de Lagrange.

Por lo tanto, resolver un problema de extremos condicionados es equivalente a resolver el sistema de $n+1$ ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1} = \lambda \dfrac{\partial g(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_1} \\[2ex] \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_2} = \lambda \dfrac{\partial g(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_n} = \lambda \dfrac{\partial g(x_1, x_2, ..., x_n)}{\partial x_n} \\[4ex] g(x_1, x_2, ..., x_n) = c \end{cases}$$

Las incógnitas del problema son:

$$\mathbf{x_0} = [x_1 \ x_2 \ ... \ x_n]^T \ \text{ y } \lambda$$

Otra manera de pensar en la resolución es armar una función auxiliar F (conocida como función de Lagrange) considerando a λ como una variable más, esto es:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, ..., x_n) - \lambda[g(x_1, x_2, ..., x_n) - c]$$

Por condición necesaria de existencia de extremos (Teorema 5.1) se plantea el sistema:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_1} \\ \\ 0 = \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_2} \\ \vdots \\ 0 = \dfrac{\partial F}{\partial x_n} = \dfrac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x_n} \\ \\ 0 = \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = g(x_1, x_2, ..., x_n) - c \end{cases}$$

A continuación se desarrollará con multiplicadores de Lagrange el mismo ejemplo de la Subsección 5.2.

Se necesitaba encontrar el máximo volumen $V(x, y, z) = xyz$ que podía almacenar una caja de cartón de un área $A(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy$ (vea la Figura 5.2).

La función auxiliar de Lagrange resulta:

$$F(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(2xz + 2yz + xy - A)$$

cuyas incógnitas son x,y,z y λ. El sistema de ecuaciones resultante de aplicar la condición necesaria de extremos es:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial F}{\partial x} = yz - \lambda(2z + y) \\ \\ 0 = \dfrac{\partial F}{\partial y} = xz - \lambda(2z + x) \\ \\ 0 = \dfrac{\partial F}{\partial z} = xy - \lambda(2x + 2y) \\ \\ 0 = \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = -2xz - 2yz - xy + A \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtienen las siguientes soluciones, en función de la variable libre x:

$$x = y$$

$$z = \frac{A - x^2}{4x}$$

$$\lambda = \frac{x}{4}$$

Por lo tanto, el volumen en función de A y de x resulta:

$$V(x,A) = xyz = x^2\left(\frac{A-x^2}{4x}\right) = \frac{Ax-x^3}{4}$$

Idéntico resultado obtenido por el procedimiento intuitivo. Para clasificar los puntos críticos encontrados, se hará uso del Teorema 5.2, analizando el signo del diferencial segundo de la función $f(x,y)$ sujeto al signo del diferencial de la condición. Esto se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.2. Encontrar los extremos de la función $f(x,y) = xy+x^2$, sujeta a la condición $y+2x=2$.

La función auxiliar de Lagrange es:

$$F(x,y,\lambda) = xy + x^2 - \lambda(y+2x-2)$$

El sistema de ecuaciones resultante de aplicar la condición necesaria de extremos es:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial F}{\partial x} = y + 2x - 2\lambda \\[2ex] 0 = \dfrac{\partial F}{\partial y} = x - \lambda \\[2ex] 0 = \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = -y - 2x + 2 \end{cases}$$

La solución de este sistema es:

$$x = 1$$
$$y = 0$$
$$\lambda = 1$$

Esto significa que en el punto $P(1,0)$ la curva de nivel de $f(x,y) = xy + x^2$ es tangente a la condición $g(x,y) = y + 2x - 2 = 0$ (Ver Figura 5.4).

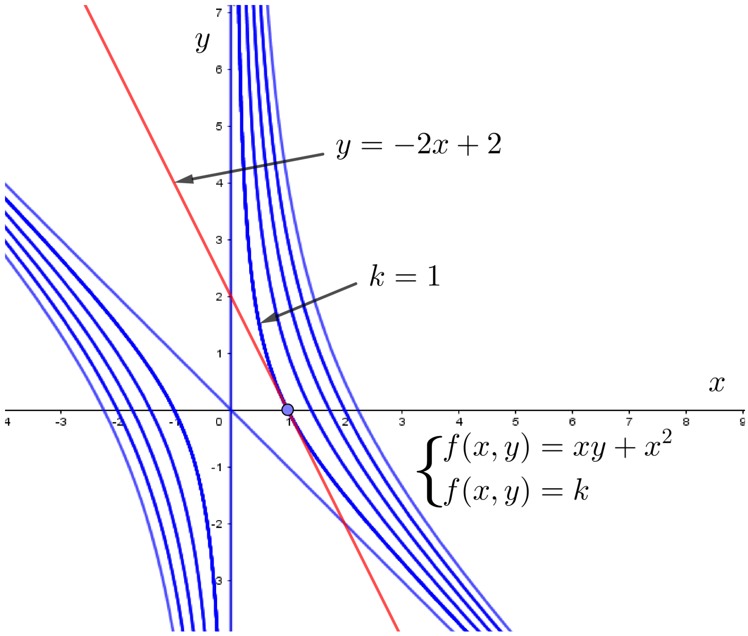


Figura 5.4: Verificación gráfica del resultado obtenido

La condición suficiente de existencia de extremos se basa en el análisis del signo del diferencial segundo de la función $f(x,y)$ juntamente con la condición.

El diferencial segundo de f es (vea la Subsubsección 2.11.3):

$$d^2f = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} dx^2 + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x_0,y_0)} dxdy + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} dy^2$$

Es decir:

$$d^2f = 2dx^2 + 2dxdy$$

Por otra parte, de la condición $g(x,y) = 0$ se obtiene el diferencial primero:

$$dg = 2dx + dy = 0$$

De donde se obtiene la relación entre diferenciales:

$$dy = -2dx$$

Reemplazando en la expresión del diferencial segundo:

$$d^2f = 2dx^2 + 2dx(-2dx)$$

$$d^2f = -2dx^2 < 0$$

Por lo que se concluye que en el punto $P(1,0)$ hay un máximo.

6. Bibliografía

1. Stewart, James. Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas. 8va edición. Año 2018.
2. Apostol, Tom. Calculus Volumen II. 2da edición. Editorial Reverté. Año 2002.
3. Larson, R. E., Edwards, B. H. Calculus. 9th Edition. Brooks/Cole Cengage Learning. Año 2010.
4. Dineen, S. Mutivariate Calculus and Geometry. Springer Undergraduate Mathematics Series. Año 2014.
5. Marsden, J., Tromba, A. Cálculo Vectorial. 3ra edición. Editorial Addison-Wesley Iberoamericana. Año 1991
6. Apuntes de cátedra.