

## Cálculo II – Análisis Matemático II

### Leer atentamente las indicaciones

- En la hoja de solución debe escribir  
*Registro..... Apellido y N..... Especialidad .....*
- La evaluación consta de cinco ejercicios.
- Resolver la evaluación en forma escrita en papel, **con lapicera**, indicando **cada ítem** y con letra legible. NO se admite editor de texto de programa computacional.
- Los gráficos son muy importantes. Puede hacerlos con lápiz (legible).
- Fotografiar la solución de la evaluación. Enviar **una** foto por cada ejercicio, o formato PDF.
- El correo de envío debe decir en el **asunto**. Especialidad y Apellido
- Enviar a [evacalculo2 analisis2@gmail.com](mailto:evacalculo2 analisis2@gmail.com) **antes** de las 19 has

### Solución Evaluación 2

Reg..... Apellido/N..... Especialidad.: .....

#### Ejercicio 1.

- a. El Teorema que relaciona integrales de línea con integrales de superficie se denomina *Teorema de Stokes.....*

Enunciar el citado teorema y el concepto físico expresado en la tesis.

*Sea  $S$  una superficie con vector normal unitario  $\vec{n}$  dirigido al exterior, cuyo contorno es una curva cerrada simple  $C$ , suave a trozos. Si  $\vec{V}$  es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta  $\mathcal{R}$  que contiene  $S$  y  $C$ , entonces:*

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{n} \, dS.$$

Concepto físico expresado en la tesis: *El teorema de Stokes establece que la circulación a lo largo de una curva simple cerrada es igual al flujo del rotor a través de una superficie abierta cualquiera, que la tenga por borde.*

- b. El Teorema que relaciona integrales triples con integrales de superficie se denomina *Teorema de Gauss o la Divergencia.....*

Enunciar el citado teorema y el concepto físico expresado en su tesis.

*Sea  $\mathcal{R}$  una región sólida limitada por una superficie cerrada  $S$  cuyo vector normal unitario  $\vec{n}$  está dirigido al exterior de  $S$ . Si  $\vec{F}$  es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en  $\mathcal{R}$  entonces,*

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\mathcal{R}} (\text{div } \vec{F}) \, dx dy dz.$$

Concepto físico expresado en la tesis: *El teorema de la divergencia establece que el flujo de un vector  $\vec{F}$ , que emana a través de una superficie  $S$  que rodea al sólido  $\mathcal{R}$  es igual a la divergencia total del vector  $\vec{F}$  en el sólido  $\mathcal{R}$  encerrado por la superficie  $S$ .*

a. Completar la expresión  $\int_C \dots d..$

i. Si el integrando es un campo escalar.

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{t_1}^{t_2} f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt$$

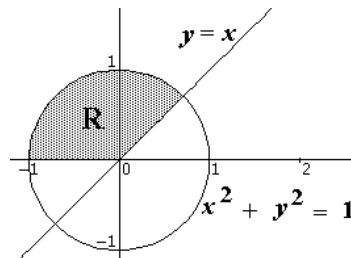
ii. Si el integrando es un campo vectorial:

$$\int_C \vec{F}(x, y) d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

### Ejercicio 2.

a Plantear el área de la región sombreada en la figura de dos formas, es decir,

$$A(R) = \iint_R dx dy = \iint_R dy dx$$



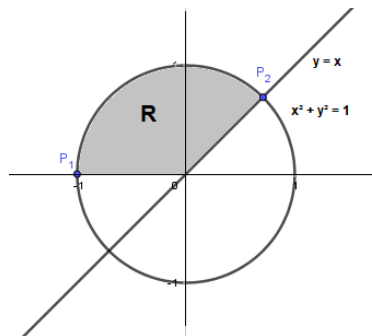
▪ Se encuentra la intersección de la circunferencia con el eje  $x$  negativo.

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow x^2 + 0^2 = 1 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow P_1 = (-1, 0)$$

▪ Se encuentra el punto de intersección entre la recta y la circunferencia.

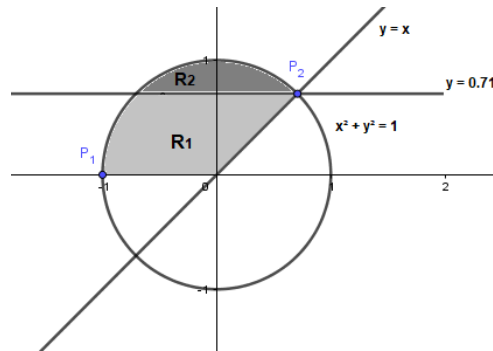
$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow x^2 + x^2 = 1 \rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} \rightarrow y_2 = x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} \rightarrow P_2 = \left( \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$



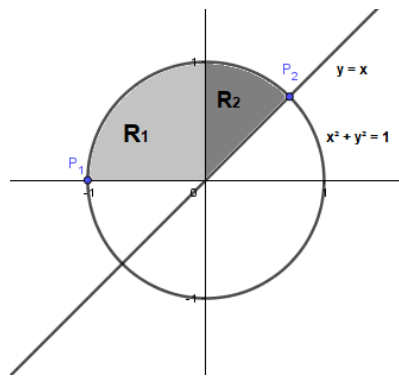
$$\triangleright A(R) = \iint_R dx dy = \iint_{R_1} dx dy + \iint_{R_2} dx dy$$

$$A(R) = \iint_R dx dy = \iint_{R_1} dx dy + \iint_{R_2} dx dy = \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^y dx dy + \int_{1/\sqrt{2}}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx dy$$



$$\triangleright A(R) = \iint_R dy dx = \iint_{R_1} dy dx + \iint_{R_2} dy dx$$

$$A(R) = \iint_R dy dx = \iint_{R_1} dy dx + \iint_{R_2} dy dx = \int_{-1}^0 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy dx + \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_x^{\sqrt{1-x^2}} dy dx$$

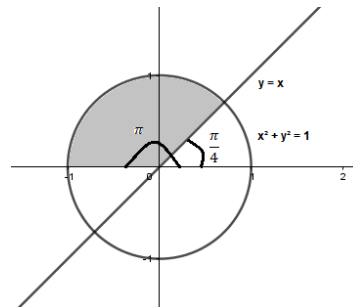


**b** Calcular el área de la región sombreada en la figura. .

Utilizando coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \rightarrow 0 \leq \rho \leq 1$$

$$\text{Jacobiano: } J = \rho \quad \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$$



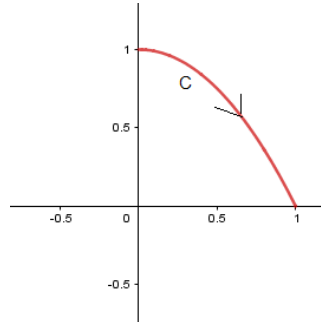
$$A(R) = \int_{\pi/4}^{\pi} \int_0^1 \rho d\rho d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi} \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^1 d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi} \frac{1}{2} d\theta = \frac{1}{2} \theta \Big|_{\pi/4}^{\pi} = \frac{3}{8} \pi$$

### Ejercicio 3.

a. Dado  $\vec{F}(x, y) = yx^3 \vec{i} + (y-x) \vec{j}$  y  $C: y = 1 - x^2$  desde  $(0,1)$  hasta  $(1,0)$ ,  
para calcular  $\int_C \vec{F}(x, y) d\vec{r}$ :

i. puede aplicar el Teorema de Green? ¿Por qué?

No se puede aplicar el teorema de Green, ya que  $C$  es una curva abierta, que no encierra una región.



i. puede aplicar el Teorema de Función Potencial y el segundo teorema fundamental? ¿Por qué?

No se puede aplicar el teorema de la función potencial ni el segundo teorema fundamental ya que el campo vectorial  $\vec{F}$  no es conservativo, no existe el campo escalar tal que sea gradiente de dicho campo vectorial. Esto es  $P_y = x^3 \neq -1 = Q_x$ .

b. Calcular la integral de línea propuesta en el ítem anterior.

$$\int_C \vec{F}(x, y) d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t^2 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + (1 - t^2)\vec{j} \quad \rightarrow \quad \vec{r}'(t) = \vec{i} + (-2t)\vec{j}$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (1 - t^2)t^3\vec{i} + (1 - t^2 - t)\vec{j}$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = (1 - t^2)t^3 + (1 - t^2 - t)(-2t) = -t^5 + 3t^3 + 2t^2 - 2t$$

$$\int_C \vec{F}(x, y) d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

$$\int_C \vec{F}(x, y) d\vec{r} = \int_0^1 (-t^5 + 3t^3 + 2t^2 - 2t) dt$$

$$\int_C \vec{F}(x, y) d\vec{r} = \left( -\frac{t^6}{6} + 3\frac{t^4}{4} + 2\frac{t^3}{3} - t^2 \right) \Big|_0^1$$

$$\int_C \vec{F}(x, y) d\vec{r} = \left( -\frac{1^6}{6} + 3\frac{1^4}{4} + 2\frac{1^3}{3} - 1^2 \right) \Big|_0^1$$

$$\int_C \vec{F}(x, y) d\vec{r} = \frac{1}{4}$$

#### Ejercicio 4.

Si  $\vec{F}$  es un campo conservativo y  $\phi = xy + 2y^2 + C$  su función potencial.

- a Indicar la expresión del campo vectorial  $\vec{F}$ . Justificar la respuesta.

Como  $\vec{F}$  es un campo conservativo y  $\phi$  es su función potencial, como consecuencia del primer teorema fundamental del cálculo integral se tiene que

$$\vec{F}(x, y) = \vec{\nabla}\phi(x, y) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} = y\vec{i} + (x + 4y)\vec{j}.$$

- b Calcular  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  siendo  $C$  los lados de un triángulo de lados  $(0,0)$ ,  $(1,0)$   $(1,1)$  recorrida en sentido anti horario. Justificar el resultado.

Como consecuencia del segundo teorema fundamental del cálculo integral se verifica que el trabajo realizado por un campo conservativo a lo largo de una trayectoria cerrada vale cero. Entonces, el cálculo de  $W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ ; ya que  $\vec{F}$  es conservativo y  $C$  es una curva cerrada.

- c Calcular  $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$  siendo  $C$  la recta que une los puntos  $A = (0,1)$  y  $B = (1,0)$ . Justificar el procedimiento empleado.

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(0,1)}^{(1,0)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Se aplica el Segundo Teorema fundamental del cálculo integral,

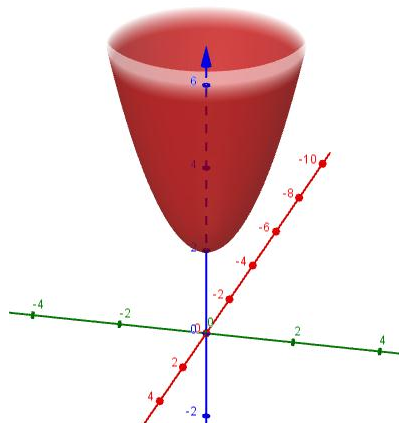
$$\int_{(0,1)}^{(1,0)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{(0,1)}^{(1,0)} \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} = \phi(1,0) - \phi(0,1) = C - (2 + C) = -2$$

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -2$$

#### Ejercicio 5.

Dada la superficie  $z = 2 + x^2 + y^2$ ,

- a Calcular el área latera de la superficie dada si  $z < 6$ . Graficar.  
➤ El gráfico de la superficie  $S$  corresponde a un paraboloide, para  $z < 6$ .



- Área Lateral de  $S$ .  $A(S) = \iint_S dS = \iint_R \frac{1}{\cos(\vec{n}, z)} dx dy$

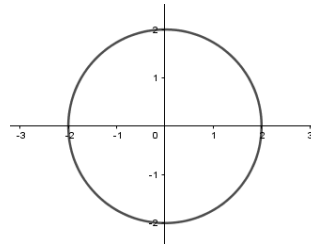
$$g(x, y, z) = -x^2 - y^2 + z - 2 = 0$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}g(x, y, z)}{\|\vec{\nabla}g(x, y, z)\|} = \frac{-2x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \quad \rightarrow \quad \cos(\vec{n}, z) = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

$$A(S) = \iint_R \frac{1}{\cos(\vec{n}, z)} dx dy = \iint_R \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy$$

Proyección sobre el plano  $xy$ , con  $z=6$ .

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$



Se hace el cambio a coordenadas polares,

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \rightarrow \quad 0 \leq \rho \leq 2 \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho \sqrt{4\rho^2 + 1} d\rho d\theta$$

$$A(S) = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} (4\rho^2 + 1)^{3/2} \Big|_0^2 d\theta$$

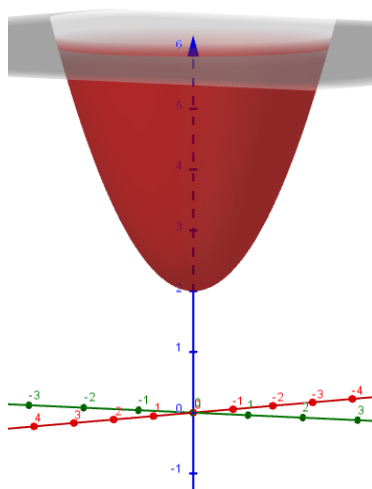
$$A(S) = \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} (17^{3/2} - 1) d\theta$$

$$A(S) = \frac{1}{12} (17^{3/2} - 1) \theta \Big|_0^{2\pi}$$

$$A(S) = 11,51\pi$$

**b** Dado el campo vectorial  $\vec{F}(x, y, z) = 2yx\vec{i} - y^2\vec{j} + 8z\vec{k}$  determinar el flujo del campo  $\vec{F}$  a través del sólido formado por la superficie dada y el plano  $z = 6$ . Interprete el resultado. Graficar.

➤ El gráfico de la superficie  $S$  corresponde a un paraboloide  $S_1$  y el plano  $z=6$ . Es decir, la superficie es un sólido, *cerrado*.



➤ Flujo del vector  $\vec{F}$ . Se aplicará el teorema de Gauss o de la divergencia ya que se verifican sus hipótesis.

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\mathfrak{R}} (\operatorname{div} \vec{F}) \, dx \, dy \, dz$$

Es decir, el flujo del campo vectorial es,

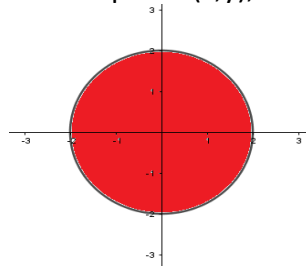
$$\Phi = \iiint_{\mathfrak{R}} (\operatorname{div} \vec{F}) \, dx \, dy \, dz$$

Cálculo de la divergencia de  $\vec{F}$

$$\operatorname{div} \vec{F} = P_x + Q_y + R_z = 2y - 2y + 8 = 8$$

Para el cálculo de la integral, se proyecta en el plano (x,y),

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$



Se hace el cambio de coordenadas. En este caso corresponde *coordenadas cilíndricas*

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \rightarrow$$

<p>En el círculo  <math>0 \leq \rho \leq 2</math> ;  <math>0 \leq \theta \leq 2\pi</math> ;</p>
---

<p>En el gráfico de la  superficie  <math>2 + \rho^2 \leq z \leq 6</math></p>
---

$$J = \rho$$

$$\Phi = \iiint_{\mathfrak{R}} (\operatorname{div} \vec{F}) \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{2+\rho^2}^6 8\rho \, dz \, d\rho \, d\theta$$

$$\Phi = 8 \int_0^{2\pi} \int_0^2 \rho z \Big|_{2+\rho^2}^6 \, d\rho \, d\theta$$

$$\Phi = 8 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (6\rho - \rho(2 + \rho^2)) \, d\rho \, d\theta = 8 \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4\rho - \rho^3) \, d\rho \, d\theta$$

$$\Phi = 8 \int_0^{2\pi} \left( 2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^2 \, d\theta = 8 \int_0^{2\pi} 4 \, d\theta = 32\theta \Big|_0^{2\pi}$$

$\Phi = 64\pi$
----------------

*Interpretación:* Como el flujo de  $\vec{F}$  es positivo, entonces predomina el flujo saliente.

**Nota.** Otra forma de calcular el flujo de  $\vec{F}$  es por definición.

En este caso, como S es un sólido (superficie cerrada), se debe calcular el flujo sobre el paraboloides; sobre la tapa (intersección del paraboloides con el plano  $z=6$ ) y luego sumar ambos para obtener el flujo total.

Esto es,

$$\Phi = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS_1 + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \, dS_2 \quad ; \quad \text{siendo } S_1 \text{ el paraboloides y } S_2 \text{ la tapa}$$

$$\Phi = \iint_{R_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \frac{1}{\cos(\vec{n}_1, z)} dx dy + \iint_{R_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \frac{1}{\cos(\vec{n}_2, z)} dx dy$$

Luego, se procede a calcular,

$$\vec{n}_1 = \frac{\vec{\nabla}g(x, y, z)}{\|\vec{\nabla}g(x, y, z)\|} = \frac{-2x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \quad \rightarrow \quad \cos(\vec{n}_1, z) = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} =$$

$$\vec{n}_2 = (0, 0, 1) \quad \rightarrow \quad \cos(\vec{n}_2, z) = 1$$

$$\vec{F} \cdot \vec{n}_1 = 2yx \left( \frac{-2x}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \right) - y^2 \left( \frac{-2y}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \right) + 8z \left( \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \right)$$

$$\triangleright \vec{F} \cdot \vec{n}_1 = \frac{-4x^2y + 2y^3 + 8z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

$$\triangleright \vec{F} \cdot \vec{n}_2 = 8z = 8 \cdot 6 = 48$$

$$\Phi = \iint_{R_1} \frac{-4x^2y + 2y^3 + 8z}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy + \iint_{R_2} 48 dx dy$$

Se deja al lector que realice el cálculo correspondiente.

*Es claro que esta forma de cálculo es tediosa y el ejercicio se resuelve aplicando el Teorema de Gauss (se verifican las hipótesis del teorema) y facilita los cálculos.*