



UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN JUAN

Facultad de Ingeniería

Departamento de Matemática



CÁLCULO II

CIVIL - MINAS - METALÚRGICA EXTRACTIVA

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

AGRIMENSURA

“NOTAS DE CLASE”

INTEGRALES

Integrales de Superficie

Dra. Prof. N. Susana Ozán

Mg. Prof. Emma E. Morales

Ing. Pablo Marcuzzi

Mg. Lic. Alejandra Garcés

Dra. Ing. Cecilia Fernández

Año 2020

INTEGRALES DE SUPERFICIE

1. INTRODUCCIÓN

Las integrales de superficie y sus aplicaciones son los temas que se abordan a continuación. En este tipo de integrales la región o dominio de integración es una superficie, por lo que se recuerdan algunos conceptos sobre ellas.

1.1. Parametrización de superficies

Un método para expresar analíticamente una superficie es la **representación implícita**.

La cual se expresa como un conjunto de puntos (x,y,z) que satisfacen una ecuación de la forma $F(x,y,z) = 0$. La que será muy utilizada en esta guía.

Cuando es posible despejar una de las coordenadas en función de las otras dos, por ejemplo z en función de x e y , obtenemos una **representación explícita** dada por una o varias ecuaciones de la forma $z = f(x,y)$.

Ejemplo 1.1. Una esfera de radio 1 y centro en el origen de coordenadas tiene la representación implícita $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Al despejar z , se obtienen dos ecuaciones:

$$z = +\sqrt{1-x^2-y^2} \qquad \text{y} \qquad z = -\sqrt{1-x^2-y^2}$$

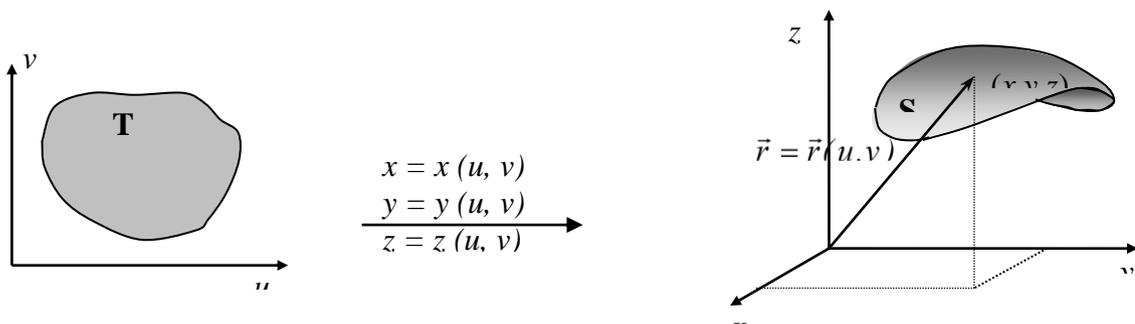
La primera es la representación explícita de la semiesfera superior y la segunda es la representación explícita de la semiesfera inferior.

Otro método de representación de superficies es la **representación paramétrica o vectorial** por medio de ecuaciones que expresan las variables en función de parámetros.

Dada $z = f(x, y)$ su **representación paramétrica** en función de dos parámetros u, v está dada por las ecuaciones: $x = x(u, v)$; $y = y(u, v)$; $z = z(u, v)$. El punto (u, v) varía en un conjunto conexo bidimensional T en el plano u, v , y los puntos (x, y, z) correspondientes constituyen una porción de superficie en el espacio x y z . Este método es análogo al de la representación de una curva en \mathbf{R}^3 , mediante tres ecuaciones con **un** parámetro.

Si se introduce el radio vector $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ que une el origen a un punto genérico (x, y, z) de la superficie, se puede combinar las tres ecuaciones paramétricas en una **ecuación vectorial**:

$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$, donde $(u, v) \in T$, este vector describe la superficie.



Ver en **ANEXO INTEGRALES DE SUPERFICIE** ejemplos de representación paramétrica de superficies y parametrización de una superficie de revolución

2. INTEGRALES DE SUPERFICIE PARA CAMPOS VECTORIALES

2.1. Producto vectorial fundamental.

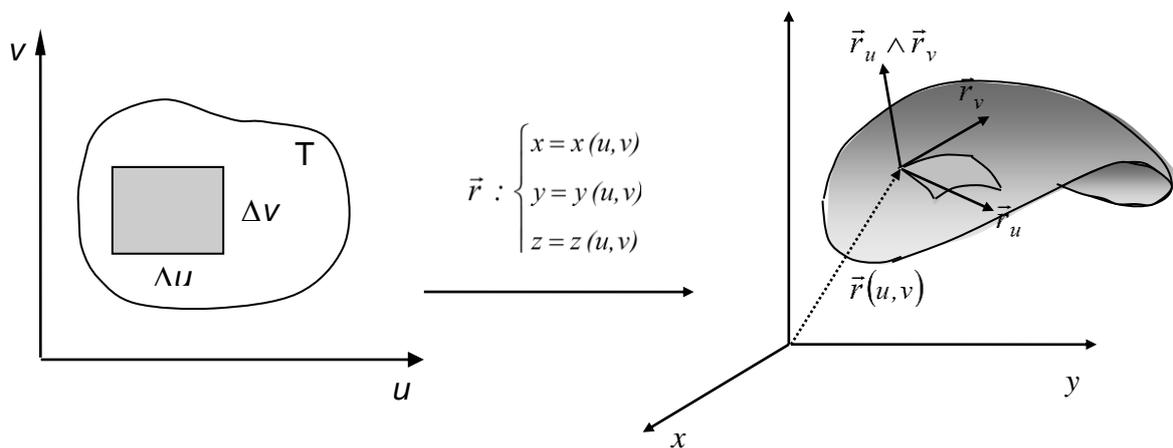
Se considera una superficie representada por la ecuación vectorial:

$$\vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \quad ; \text{ donde } (u,v) \in T$$

Si x, y, z son funciones de u, v ; con derivadas parciales continuas en T podemos considerar los vectores:

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial \vec{y}}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial \vec{z}}{\partial u}\vec{k}, \quad \vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}\vec{i} + \frac{\partial \vec{y}}{\partial v}\vec{j} + \frac{\partial \vec{z}}{\partial v}\vec{k}$$

Se considera en T un segmento rectilíneo horizontal. Su imagen por \vec{r} es una curva (llamada u -curva) situada en $\vec{r}(T)$.



Si $v = cte = c_2$, entonces $\vec{r}(u, c_2) = x(u, c_2)\vec{i} + y(u, c_2)\vec{j} + z(u, c_2)\vec{k} = \vec{r}^*(u)$

Luego: $\vec{r}_u = \vec{r}'_u(u, c_2)$ es el **vector tangente** a la curva generada por $v = cte$.

Si $u = cte = c_1$

$\vec{r}(c_1, v) = x(c_1, v)\vec{i} + y(c_1, v)\vec{j} + z(c_1, v)\vec{k} = \vec{r}^*(v)$ por lo que

$\vec{r}_v = \vec{r}'_v(c_1, v)$ es el **vector tangente** a una curva generada por $u = cte$.

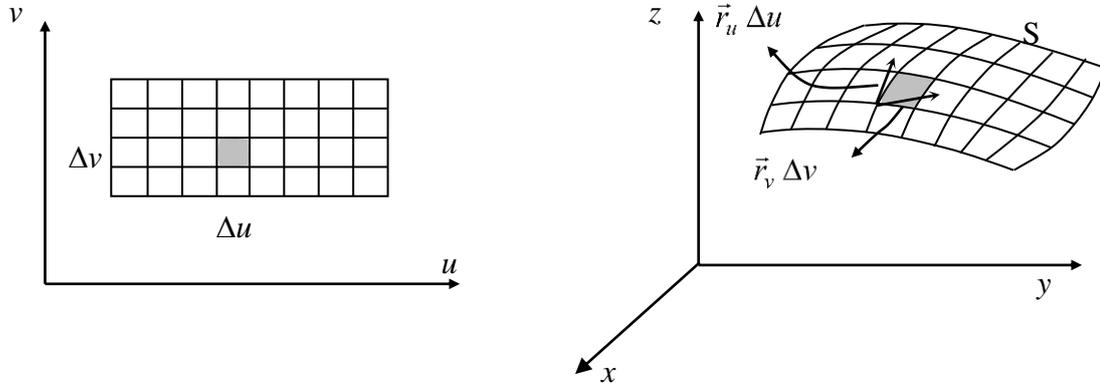
Un rectángulo en T que tenga un área $\Delta u \Delta v$ se convierte en una porción de $\vec{r}(T)$ que se aproxima por un paralelogramo determinado por los vectores $\vec{r}_u \Delta u$ y $\vec{r}_v \Delta v$. El área del paralelogramo determinado por $\vec{r}_u \Delta u$ y $\vec{r}_v \Delta v$ es el módulo de su producto vectorial

$$\| \vec{r}_u \Delta u \wedge \vec{r}_v \Delta v \| = \| \vec{r}_u \wedge \vec{r}_v \| \Delta u \Delta v$$

Sea $\vec{r} = \vec{r}(u, v) \longrightarrow d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$

si $v = cte \rightarrow d_u \vec{r} = \vec{r}_u du$ es paralelo a \vec{r}_u ,

si $u = cte \rightarrow d_v \vec{r} = \vec{r}_v dv$ es paralelo a \vec{r}_v



Luego el diferencial de superficie es: $dS = \|\vec{r}_u du \wedge \vec{r}_v dv\| = \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| du dv$

Así, **la norma del producto vectorial fundamental de $\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v$ se puede considerar como un factor de proporcionalidad de las áreas.**

2.2. Definición de área de una superficie alabeada

Sea $S = \vec{r}(T)$ una superficie paramétrica representada por la función \vec{r} definida en una región T del plano uv. Un rectángulo en T de áreas $\Delta u \Delta v$ es aplicado por \vec{r} sobre un paralelogramo curvilíneo en S con área aproximadamente igual a:

$$\|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| \Delta u \Delta v$$

Observación.

- Si (u, v) es un punto en T en el cual \vec{r}_u y \vec{r}_v son continuas y el producto vectorial fundamental no es nulo, el punto imagen $\vec{r}(u, v)$ se llama **punto regular** de \vec{r} . Una **superficie** $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ se llama **regular** si todos sus puntos son regulares. En cada punto regular los vectores \vec{r}_u y \vec{r}_v determinan un plano que tiene el vector $\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v$ como normal. El plano determinado por \vec{r}_u y \vec{r}_v es el plano tangente a la superficie.
- Los puntos en los que no son continuas \vec{r}_u ó \vec{r}_v , o bien $\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v = 0$, se llaman **puntos singulares** de \vec{r} . En los puntos en que este producto vectorial es nulo el paralelogramo degenera en una curva o un punto.

- La continuidad de $\vec{r}, \vec{r}_u, \vec{r}_v$ determina que no existen aristas o "puntos singulares" en la superficie, la no anulación de $\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v$ evita los casos de degeneración antes citados.

2.3. Definición de área de una superficie paramétrica:

El área de una superficie S, que se representa por A(S), se define por la integral

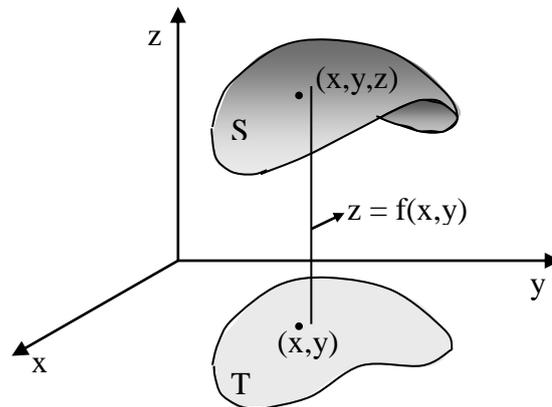
$$A(S) = \iint_S dS = \iint_T \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| du dv$$

Observe que S representa una superficie alabeada en el espacio y T una región plana en uv.

2.4. Área de superficies alabeadas en coordenadas cartesianas

Si S está dada en forma explícita por una ecuación de la forma $z = f(x,y)$, se usa x e y como parámetros, o sea $x = x, y = y, z = f(x,y)$ obteniendo la siguiente ecuación vectorial $\vec{r}(x,y) = x \vec{i} + y \vec{j} + f(x,y) \vec{k}$

Esta representación nos da siempre una superficie paramétrica simple. La región T es la proyección de la superficie sobre el plano xy.



Para calcular el producto vectorial fundamental se calcula:

$$\vec{r}_x = \vec{i} + f_x \vec{k} \quad \vec{r}_y = \vec{j} + f_y \vec{k}$$

Si f(x,y) es diferenciable se obtiene:

$$\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x \vec{i} - f_y \vec{j} + \vec{k}$$

Puesto que la **componente** z de $\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y$ es 1, el producto vectorial fundamental nunca es cero. Luego los únicos puntos singulares que pueden presentarse por esta representación son aquellos puntos en los que al menos una de las derivadas parciales f_x ó f_y no sea continua.

$$\|\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y\| = \|-f_x \vec{i} - f_y \vec{j} + \vec{k}\| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

En este caso,

$$dS = \|\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y\| dx dy = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

La integral para calcular el área de la superficie toma la forma:

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_T \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$$

Nota. Cuando S está en un plano paralelo al plano xy, la función $f(x,y)$ es constante, de modo que $f_x = f_y = 0$, luego

$$A(S) = \iint_T dx dy$$

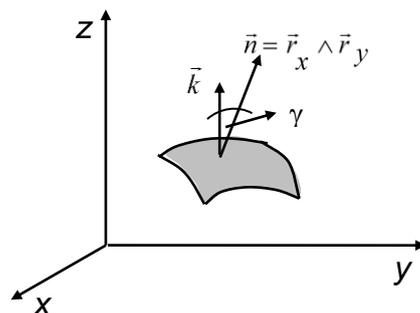
que coincide con la forma corriente para el **cálculo de áreas de regiones planas**.

Ejercicio 2.1. Cuando trabaja con $A(S) = \iint_S dS = \iint_T \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$ determine y grafique los dominios de integración S y T. Indique qué tipo de integrales se relacionan.

2.5. Definición de diferencial superficie dS

Se deduce una de las expresiones de dS.

En cada punto de S, definida por $z = f(x,y)$ se considera el ángulo γ formado por el vector normal $\vec{n} = \vec{r}_x \wedge \vec{r}_y$ y el vector unitario \vec{k}



Si $z = f(x,y)$ el vector normal queda:

$$\vec{n} = \vec{r}_x \wedge \vec{r}_y = -f_x \vec{i} - f_y \vec{j} + \vec{k}$$

Se realiza el producto escalar $\vec{n} \cdot \vec{k} \stackrel{def}{=} \|\vec{n}\| \|\vec{k}\| \cos \gamma$

para los versores $\vec{n} = \frac{\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y}{\|\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y\|}$ y \vec{k} el producto escalar es

$\vec{n} \cdot \vec{k} = \frac{(-f_x \vec{i} - f_y \vec{j} + \vec{k})}{\|\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y\|} \cdot \vec{k}$ y como el versor $\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$, entonces

$$\cos \gamma = \frac{1}{\|\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y\|} \quad \text{por lo que} \quad \|\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y\| = \frac{1}{\cos \gamma}$$

Luego:
$$dS \stackrel{\text{def}}{=} \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| du dv = \|\vec{r}_x \wedge \vec{r}_y\| dx dy = \frac{1}{\cos \gamma} dx dy$$

Este dS permite calcular el área de una superficie S , o sea una **integral de superficie transformándola** en una **integral doble**.

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_T \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| du dv = \iint_T \frac{1}{\cos \gamma} dx dy$$

Teniendo en cuenta que $\cos \gamma = \cos(\vec{n}, z) = \cos(\vec{n}, \vec{k})$, se expresa el diferencial de superficie como,

$$dS = \frac{dx dy}{\cos(\vec{n}, z)} = \frac{dx dy}{\cos(\vec{n}, \vec{k})}$$

Y la integral que calcula el área como,

$$A(S) = \iint_T \frac{1}{\cos(\vec{n}, z)} dx dy = \iint_T \frac{1}{\cos(\vec{n}, \vec{k})} dx dy$$

Por analogía para:

- $x = f(y, z)$ el diferencial de superficie toma la forma $dS = \frac{dy dz}{\cos(\vec{n}, x)} = \frac{dy dz}{\cos(\vec{n}, \vec{i})}$
- $y = g(x, z)$ el diferencial de superficie toma la forma $dS = \frac{dx dz}{\cos(\vec{n}, y)} = \frac{dx dz}{\cos(\vec{n}, \vec{j})}$

Ejercicio 2.2. Una integral de superficie es una integral doble? Justifique su respuesta.

Ver otras deducciones de **dS** en **ANEXO- INTEGRALES DE SUPERFICIE** .

Ejemplo 2.1.

Encuentre el área lateral de la superficie del paraboloide $z = x^2 + y^2$ interceptado por el plano $z = 4$.

Se va a calcular $A(S) = \iint_S dS$ se utiliza $dS = \frac{dx dy}{\cos(\vec{n}, \vec{z})}$

Para la superficie dada la normal exterior es

$$\vec{n} = \frac{-2x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \quad \cos(\vec{n}, \vec{z}) = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$$

Así el área lateral se plantea de la siguiente manera

$$A(S) = \iint_T \sqrt{1+4x^2+4y^2} dy dx$$

Para su resolución se utilizan coordenadas polares obteniendo: $\frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1)$
 Se deja al lector indicar los pasos para resolver la integral.

3. INTEGRALES DE SUPERFICIE PARA CAMPOS ESCALARES

Para calcular una integral de superficie es necesario que su dominio de integración sea una función escalar con condiciones de integrabilidad.

Trabajamos con un campo escalar $f = f(x, y, z)$ definido y continuo en S , con derivadas parciales primeras continuas en T y una expresión escalar para el dS :

$$dS = \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| du dv$$

Luego

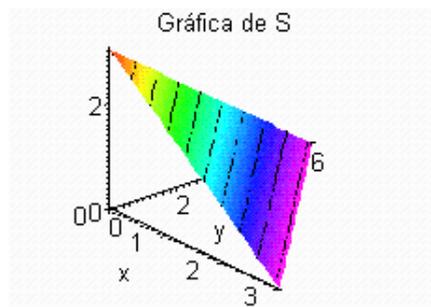
$$\iint_S f dS = \iint_T f[\vec{r}(u, v)] \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| du dv$$

4. APLICACIONES

Cuando $f = f(x, y, z) = 1$, el área de una superficie alabeada se calcula:

$$A(S) = \iint_S dS = \iint_T \|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| du dv = \iint_T \frac{1}{\cos \gamma} dx dy$$

Ejemplo 4.1. Calcular el área lateral de la porción del plano $2x + y + 2z = 6$, ubicada en el primer octante.



Se trabaja con la expresión del plano en forma explícita $z = \frac{1}{2} (6 - 2x - y)$

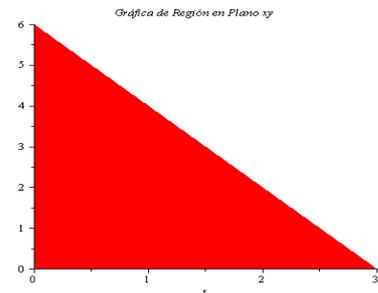
Para calcular el dS , se necesita calcular el versor normal

$$\vec{n} = \frac{\nabla S}{\|\nabla S\|} = \frac{2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{1}{3}(2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}), \text{ luego } \cos(\vec{n}, \vec{z}) = \frac{2}{3} \text{ por lo que}$$

$$dS = \frac{1}{\cos(\vec{n}, \vec{z})} dx dy = \frac{3}{2} dx dy$$

Por lo que el área lateral es:

$$A(S) = \iint_S dS = \int_0^3 \int_0^{6-2x} \frac{3}{2} dy dx = 9$$



4.1. Centro de gravedad. Momento de inercia

Si el campo escalar $f = f(x, y, z)$ se interpreta como la densidad (masa por unidad de área) de una lamina delgada adaptada a la superficie S , la masa total m de la superficie se define por la formula

$$m = \iint_S f(x, y, z) dS$$

Su centro de gravedad, el punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ es determinado por las fórmulas.

$$\bar{x}_m = \iint_S x f(x, y, z) dS, \quad \bar{y}_m = \iint_S y f(x, y, z) dS, \quad \bar{z}_m = \iint_S z f(x, y, z) dS$$

El momento de inercia I_L de S alrededor de un eje L cualquiera viene dado por:

$$I_L = \iint_S \delta^2(x, y, z) f(x, y, z) dS$$

donde $\delta(x, y, z)$ representa la distancia de un punto genérico (x, y, z) de S a la recta L .

Ejemplo 4.2.

Determinar el centro de gravedad de la superficie de una semiesfera de radio a .

Se utiliza la representación: $\vec{r}(u, v) = a \cos u \cos v \vec{i} + a \sin u \cos v \vec{j} + a \sin v \vec{k}$ con

$$0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq \pi/2$$

Donde, $\|\vec{r}_u \wedge \vec{r}_v\| = a^2 \cos v$

En este ejemplo se considera la densidad $f = f(x, y, z)$ constante, $f = c$.

$$m = \iint_S f \, dS = c \iint_S dS = 2\pi a^2 c$$

Debido a la simetría, las coordenadas \bar{x} e \bar{y} del centro de gravedad son 0.

$$\begin{aligned} \bar{z} m &= c \iint_S z \, dS = c \iint_T a \operatorname{sen} v \, a^2 \cos v \, du \, dv \\ &= c a^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} v \cos v \, dv \, du = \pi a^3 c, \text{ luego } \bar{z} = \pi a^3 \frac{c}{m} = \frac{\pi a^3 c}{2\pi a^2 c} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

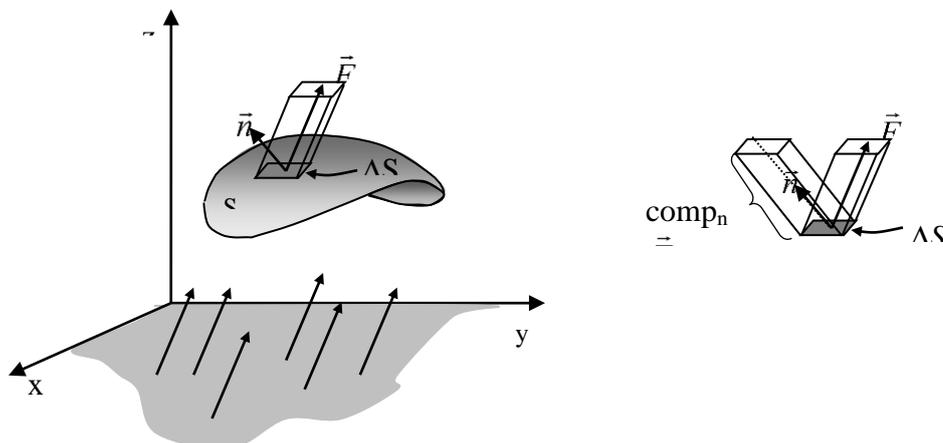
5. INTEGRALES DE SUPERFICIE. FLUJO

Los vectores físicos, mecánicos o geométricos, son cantidades dirigidas, diferenciándose los primeros en que se extienden en una región, donde, pasando de un punto al otro, varían en magnitud y dirección en forma continua, por no estar confinados en un punto de aplicación determinado. La región en donde varía el vector es su campo.

Para cada punto aislado ambas especies de vectores se identifican en la misma definición y, por consiguiente, las operaciones básicas, suma, producto, etc., les son comunes y se efectúan en igual forma.

La propiedad de extenderse en el espacio, implica la definición de una nueva magnitud característica, que es el **flujo**.

Supongamos una superficie S inmersa en un fluido que tiene un campo de velocidades \vec{F} y sea ΔS el área de un trozo pequeño de superficie S (área de un elemento infinitesimal de superficie) sobre el cual se puede considerar \vec{F} aproximadamente constante. La cantidad de fluido (volumen del fluido) que atraviesa esta región por unidad de tiempo está determinada aproximadamente por el volumen de la columna de altura $\vec{F} \cdot \vec{n}$



Por lo tanto, el volumen del fluido $\Delta\Phi$ que atraviesa el elemento infinitesimal de superficie ΔS por unidad de tiempo está determinado por: $\Delta\Phi = \vec{F} \cdot \vec{n} \Delta S$

El volumen total del fluido que atraviesa la superficie S por unidad de tiempo (flujo total) se define sumando los $\Delta\Phi_i = \vec{F}_i \cdot \vec{n}_i \Delta S_i$ correspondientes a cada elemento infinitesimal de superficie se suman, esto es $\sum_{i=1}^n \Delta\Phi_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{n}_i \Delta S_i$ tomando el límite cuando $\|\mathbf{P}\|$ tiende a cero $\lim_{\|\mathbf{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta\Phi_i$ se llega a la definición de fluido.

5.1. Definición de flujo

Definición 5.1. El flujo total de \vec{F} a través de S mediante la integral de superficie se calcula

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS.$$

Si $\rho(x,y,z)$ representa la densidad del fluido, entonces $\Phi = \iint_S \rho \vec{F} \cdot \vec{n} dS$ representa la masa de fluido que emana a través de S por unidad de tiempo.

Observaciones:

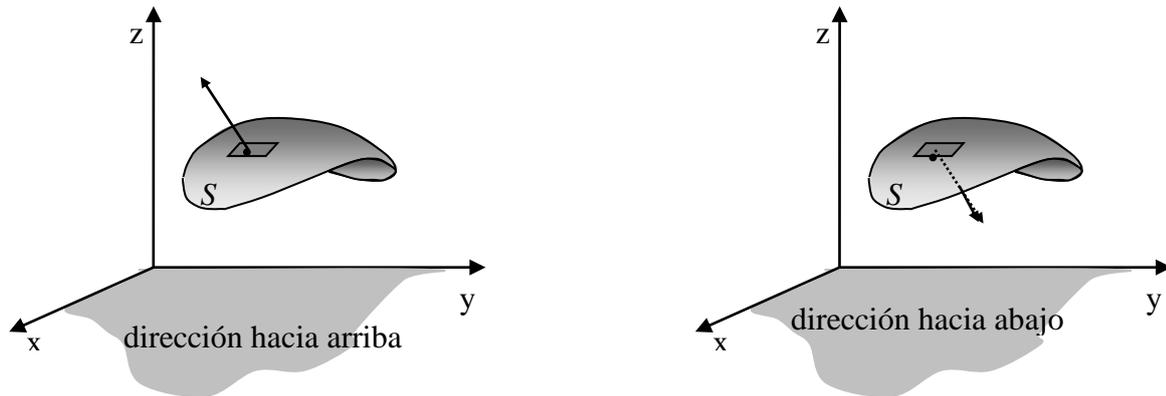
- La naturaleza del campo vectorial determina diversas clases de flujo que se calculan con la integral definida anteriormente, por ejemplo flujo eléctrico, flujo magnético, flujo de calor, etc.
- Toda superficie tiene dos vectores normales:
- Si la superficie es abierta uno superior (con componente \vec{k} positiva) y otro inferior.
- Si la superficie es cerrada uno exterior y otro interior.

El gradiente proporciona un método conveniente para encontrar un vector normal unitario.

Para una superficie S definida por $z = g(x,y)$, podemos determinar, de ser posible, dos funciones implícitas $G: z - g(x,y) = 0$; $g(x,y) - z = 0$, generando esto los vectores unitarios respectivos

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}G}{\|\vec{\nabla}G\|} = \frac{-g_x(x,y)\vec{i} - g_y(x,y)\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + [g_x(x,y)]^2 + [g_y(x,y)]^2}}$$

$$\vec{n} = \frac{-\vec{\nabla}G}{\|\vec{\nabla}G\|} = \frac{g_x(x,y)\vec{i} + g_y(x,y)\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{1 + [g_x(x,y)]^2 + [g_y(x,y)]^2}}$$



Si se toma de referencia la normal externa, se determina el carácter del flujo emanado. El flujo Φ puede ser positivo, negativo o nulo.

- Si Φ es positivo, predomina el saliente.
- Si Φ es negativo, prevalece el flujo entrante.
- Si Φ es nulo puede significar que el vector dentro del recinto no existe, o bien que los flujos entrantes y salientes son iguales, en cuyo caso el flujo resultante es pasante.

Ejemplo 5.1.

Calcular el flujo del vector $\vec{F} = yz \vec{i} + zx \vec{j} + yx \vec{k}$; a través de una esfera de radio a .

El versor normal a la esfera es $\vec{n} = \frac{x}{a} \vec{i} + \frac{y}{a} \vec{j} + \frac{z}{a} \vec{k}$, por lo que $\cos(\vec{n}, z) = \frac{z}{a}$,

y el diferencial de superficie correspondiente es $dS = \frac{a}{z} dx dy$.

$$\text{Luego: } \vec{F} \cdot \vec{n} = \frac{yzx}{a} + \frac{zxy}{a} + \frac{yxz}{a} = \frac{3 y z x}{a}$$

$$\vec{F} \cdot \vec{n} dS = \frac{3 y z x}{a} \frac{a}{z} dx dy.$$

$$\text{Por lo que el flujo es: } \Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_T 3yx dx dy$$

Se ha **transformado** la integral de superficie en una integral doble.

Se utilizan coordenadas polares proyectando sobre el plano xy .

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_T 3xy dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^a 3\rho^3 \cos\theta \sin\theta d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left. \frac{3}{4} \rho^4 \right|_0^a \cos\theta \sin\theta d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{3}{4} a^4 \cos\theta \sin\theta d\theta = \frac{3}{4} a^4 \cdot \left. \frac{\sin^2\theta}{2} \right|_0^{2\pi} = 0, \end{aligned}$$

6. DIVERGENCIA Y ROTOR DE UN CAMPO VECTORIAL

6.1. Operador Nabla de Hamilton

Hamilton introdujo el operador simbólico (nabla o delta invertido) definido por:

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

lo que determina un pseudo vector ya que solo indica operaciones a realizar.

Se considera cuando,

- a. El operador nabla está **aplicado** a una función escalar $U = U(x,y,z)$

$$\vec{\nabla} U = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}$$

Se obtiene un **vector** llamado **gradiente de U**, $\vec{\nabla} U = \text{grad } U$

- b. Si el operador nabla está **multiplicado escalarmente** por un campo vectorial

$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ campo vectorial

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Se obtiene un **escalar** denominado **divergencia de F**, $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \text{div } \vec{F}$

- c. Si el operador nabla **multiplicado vectorialmente** por un campo vectorial

$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ campo vectorial

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Se obtiene un **vector** denominado el **rotor de F**, $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \text{rot } \vec{F}$

Ejercicio 6.1. Dado los campos $\vec{F}(x,y,z) = zy\vec{i} + 2zy\vec{j} + 3xy\vec{k}$ y $f = f(x,y,z) = \text{sen}(xy) + 3zx$, calcular $\vec{\nabla} f = \text{grad } f$; $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \text{div } \vec{F}$ y $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \text{rot } \vec{F}$ según corresponda.

$$\vec{\nabla} f = \text{grad } f = (y \cos(xy) + 3z)\vec{i} + x \cos(xy)\vec{j} + 3x\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2z$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} = \nabla \wedge \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \\ &= (3x - 2y) \vec{i} + (y - 3y) \vec{j} + (0 - z) \vec{k} \end{aligned}$$

Luego el rotor del **campo vectorial** es:

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \wedge \vec{F} = (3x - 2y) \vec{i} + (-2y) \vec{j} + (-z) \vec{k}$$

6.2. Significado físico de divergencia y rotor.

1. Divergencia

Si \vec{v} es un campo de velocidades en el movimiento de un fluido, la $\text{div } \vec{V}$ representa la variación de flujo por unidad de volumen (velocidad de expansión por unidad de volumen) en cada punto.

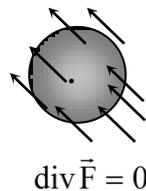
$$\text{div } \vec{V} = \frac{d\Phi}{dV} = \frac{\Phi_s - \Phi_e}{dV} = \text{variación del flujo por unidad de volumen.}$$

En un sistema de fluidos, la divergencia también se puede interpretar como una medida de la razón de cambio de la densidad (o volumen) del fluido en un punto, en otras palabras la divergencia es una medida de la compresibilidad del fluido.

- Si es $\text{div } \vec{V} = 0$, el fluido se llama incompresible.

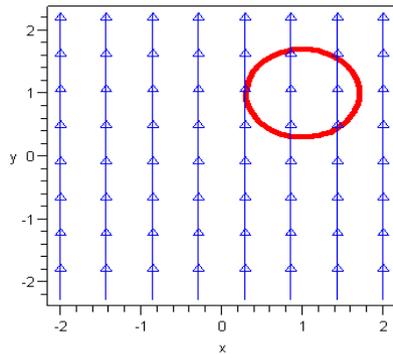
$$\text{div } \vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{d\Phi}{dV} = 0 \rightarrow \Phi = \text{cte} \Rightarrow \Phi_e = \Phi_s$$

En un campo electromagnético, si $\text{div } \vec{V} = 0$, se dice que el campo vectorial es solenoidal.



Ejemplo 6.1. Sea $\vec{F}(x, y) = 2\vec{j}$.

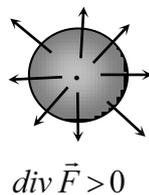
Es fácil comprobar que $\text{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$. Esto se puede ver en un gráfico del campo vectorial y una circunferencia en este gráfico.



La Figura permite observar que los vectores que "entran" en la circunferencia son igual en magnitud que los vectores que "salen", esto indica que la cantidad de fluido que "entra" es la misma cantidad que "sale". En este caso la divergencia es cero.

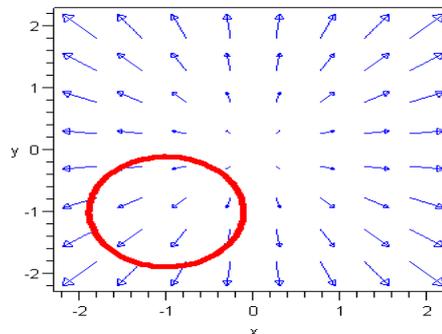
Se deja al lector que calcule analíticamente el valor de la divergencia del campo vectorial dado.

- Si es $\text{div } \vec{V} > 0$ (positivo), el fluido se expande (aumenta su volumen)



Ejemplo 6.2. Sea $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$

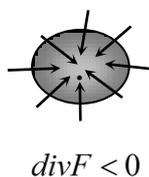
Es fácil comprobar que $\text{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 2$. Esto se puede ver en un gráfico del campo vectorial y una circunferencia en este gráfico.



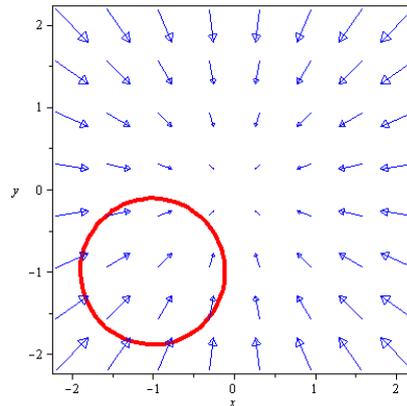
Para este campo, la Figura muestra que los vectores que "entran" hacia la circunferencia son más cortas que los que "salen". Esto indica que el flujo neto afuera de la circunferencia es positivo (es decir, hay más fluido saliendo que entrando). En este caso la divergencia es positiva.

Se deja al lector que calcule analíticamente el valor de la divergencia del campo vectorial dado.

- Si es $\text{div } \vec{V} < 0$ (negativo), el fluido se contrae (disminuye su volumen)



Ejemplo 6.3. Sea $\vec{F}(x,y) = -x\vec{i} - y\vec{j}$. Es fácil comprobar que $\text{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -2$. Esto se puede ver en un gráfico del campo vectorial y una circunferencia en este gráfico.



Para este campo, la Figura muestra que los vectores que "entran" hacia la circunferencia son más largos que los que "salen". Esto indica que el flujo neto afuera de la circunferencia es negativo (es decir, hay más fluido entrando que saliendo). En este caso la divergencia es negativa. Se deja al lector que calcule analíticamente el valor de la divergencia del campo vectorial dado.

2. Rotor. Campos irrotacionales o conservativos.

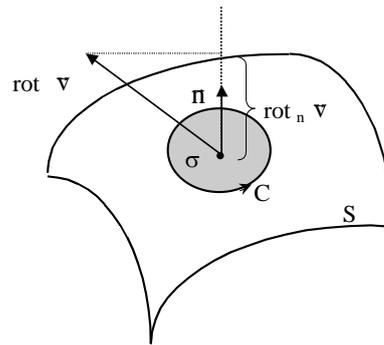
La circulación se interpreta en un campo de fuerzas como **trabajo** de una partícula que se desplaza. Otra interpretación de la circulación a lo largo de una curva abierta o cerrada se obtiene en un campo de velocidades $\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ de un fluido, pues en tal caso da una medida de la **circulación general (positiva o negativa) del fluido a lo largo de la curva en el sentido elegido**.

Si en un recinto simplemente conexo la curva C es cerrada y la circulación por ella no es nula, ello indica que en una superficie limitada por C el movimiento tiene un carácter general rotatorio; por tal razón cuando la **circulación es nula sobre toda curva cerrada C** , el movimiento y el campo \vec{v} , se llaman **irrotacional o conservativo**.

En el caso general, si la curva cerrada C se contrae hacia un punto M de modo que tienden a cero tanto el área σ de una superficie S que la tenga por borde, como su diámetro, la circulación sobre ella tiende a cero, pero no así en general su cociente por el área σ . El límite de ese cociente depende de la dirección \vec{n} de la normal a S . Veremos que define un vector, llamado **circulación** en el punto M , o **rotor** del campo en M , indicado por $\text{rot}\vec{v}$, cuya componente según

$$\vec{n} \text{ es: } (\text{rot } \vec{V})_{\vec{n}} = \text{rot}_{\vec{n}} \vec{V} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma} \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

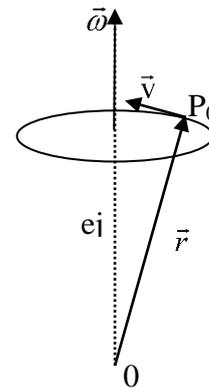
O sea que: $\text{rot}_{\vec{n}} \vec{V} = (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{n}$



Observación.

Si \vec{v} es el vector velocidad, se puede demostrar que:

$\text{rot } \text{rot } \vec{V} = 2\vec{\omega}$ donde $\vec{\omega}$ es la velocidad angular



El concepto de "Rotacional" fue introducido primero por Maxwell (físico escocés 1831-1879) en sus estudios de campos electromagnéticos, sin embargo este concepto (el rotacional) se entiende fácilmente en relación con el flujo de fluidos. Si un dispositivo de paletas, como el que se muestra en la figura 1 se introduce en la corriente de un fluido, entonces el rotor del campo de velocidad \vec{v} es una medida de la tendencia del fluido a hacer girar el dispositivo en torno a su eje vertical $\vec{\omega}$. Si $\text{rot } \vec{V} = 0$ se expresa entonces que la corriente del fluido es irrotacional, lo cual significa que está libre de vórtices o remolinos que causarían que las paletas giraran.

En la figura el eje w de los álabes apunta perpendicularmente hacia afuera de la página.

Fig.1

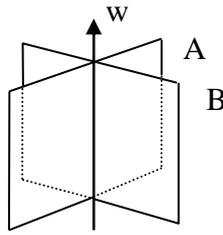
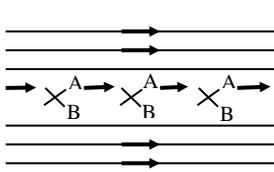
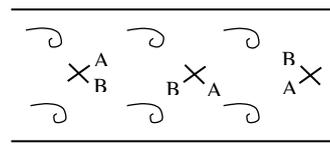
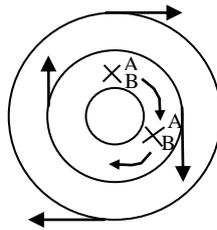


Fig.2

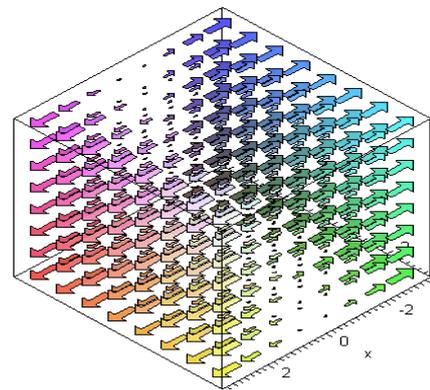


(a) corriente irrotacional



(b) corriente rotacional

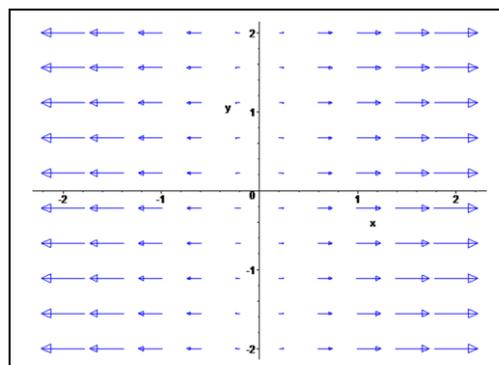
Ejemplo 6.4. El campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i}$ es un campo vectorial para el cual $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$. Es campo irrotacional que se representa en la siguiente Figura.



Representación del campo vectorial

Se deja al lector que calcule analíticamente el valor del rotor del campo vectorial dado.

La Figura siguiente muestra una vista de este campo vectorial para un valor de z constante.

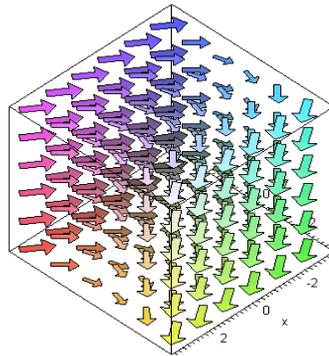


Representación del campo vectorial para $z=0$

Claramente se observa, que si esta es una corriente de fluido y los vectores señalan la distribución de velocidades a lo largo de líneas de corriente, una ruedita sumergida en este fluido no giraría, sólo sería arrastrada por la misma.

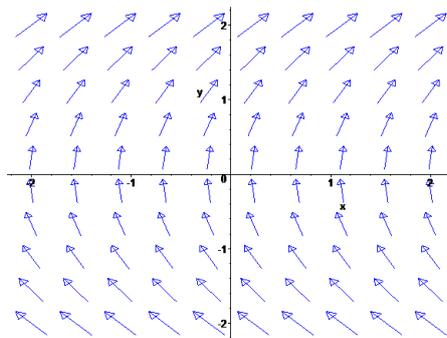
Ejemplo 6.5. Dado $\vec{F}(x, y, z) = y\vec{i} + 2\vec{j}$ un campo vectorial, $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = (0, 0, -1)$. Es un campo vectorial que gira alrededor del eje z en sentido horario.

Se deja al lector que calcule analíticamente el valor del rotor del campo vectorial dado. La Figura muestra una representación de este campo vectorial.



Representación del campo vectorial

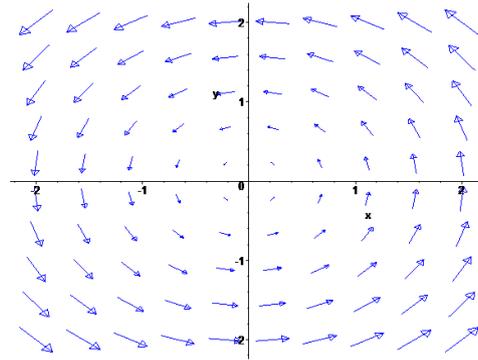
Si se logra una vista de este campo vectorial para un valor de z constante, como en la Figura que sigue, se ve que si esta es una corriente de fluido y los vectores señalan la distribución de velocidades a lo largo de líneas de corriente, una ruedita sumergida en este fluido girará en sentido negativo, es decir a favor de las agujas del reloj.



Representación del campo vectorial para $z=0$

Ejemplo 6.6. Dado $\vec{F}(x, y, z) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ un campo vectorial, $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = (0, 0, 2)$.

Si se observa una vista de este campo vectorial para un valor de z constante, se ve que si esta es una corriente de fluido y los vectores señalan la distribución de velocidades a lo largo de líneas de corriente, una ruedita sumergida en este fluido girará en sentido positivo, es decir en contra de las agujas del reloj como se ve en la Figura que sigue.



Representación del campo vectorial para $z=0$

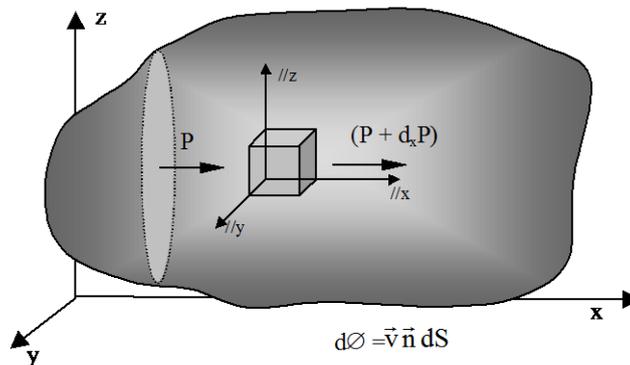
Se deja al lector que calcule analíticamente el valor del rotor del campo vectorial dado.

7. TEOREMA DE GAUSS Y STOKES

7.1. Teorema de Gauss o de la divergencia

Sea \mathfrak{R} una región sólida limitada por una superficie cerrada S cuyo vector normal unitario \vec{n} está dirigido al exterior de S . Si \vec{F} es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en \mathfrak{R} entonces,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\mathfrak{R}} (\text{div} \vec{F}) \, dx \, dy \, dz$$



Demostración. Ver ANEXO .

Observaciones

- La superficie S debe ser cerrada en el sentido de que forma una frontera completa del sólido \mathfrak{R} .
- El teorema de la divergencia establece que el flujo de un vector \vec{F} , que emana a través de una superficie S que rodea al sólido \mathfrak{R} es igual a la divergencia total del vector \vec{F} en el sólido \mathfrak{R} encerrado por la superficie S .

- El teorema de la Gauss expresa una relación entre integral triple extendida a un sólido y una integral de superficie tomada sobre la frontera de ese sólido.

Ejemplo 7.1.

Dado $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ calcular el flujo Φ a través de una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

$$\Phi = \iiint_R (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV = \iiint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 1$$

$$\Phi = \iiint 3 dx dy dz = 3 \frac{4}{3} \pi a^3 \rightarrow \Phi = 4 \pi a^3$$

¿Por qué se puede utilizar el Teorema de Gauss o divergencia?

Si se calcula utilizando la definición: $\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot \left(\frac{x}{a}\vec{i} + \frac{y}{a}\vec{j} + \frac{z}{a}\vec{k} \right) = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{a} + \frac{z^2}{a} = \frac{a^2}{a} = a$$

$$\vec{F} \cdot \vec{n} \cdot dS = a \cdot \frac{a}{z} dx dy = \frac{a^2}{z} dx dy$$

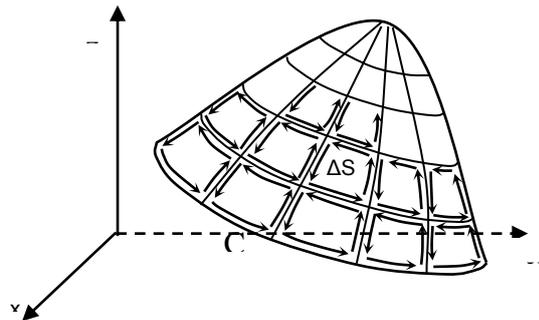
$$\frac{\Phi}{2} = \iint_T \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}} dx dy$$

Usando coordenadas polares se llega a $\frac{\Phi}{2} = 2a^3 \pi \rightarrow \Phi = 4a^3 \pi$

7.2. Teorema de Stokes

Sea S una superficie con vector normal unitario \vec{n} dirigido al exterior, cuyo contorno es una curva cerrada simple C, suave a trozos. Si \vec{V} es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta \mathfrak{R} que contiene S y C, entonces:

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{n} dS$$

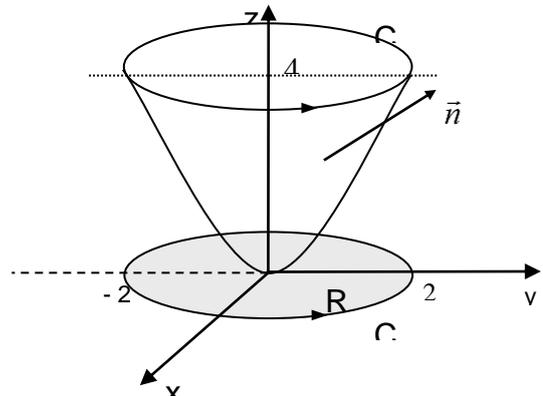


Demostración. Ver ANEXO.

Observaciones

- El teorema de Stokes es una extensión del teorema de Green al espacio, relaciona una integral de superficie con una integral de línea.
- El teorema de Stokes establece que la circulación a lo largo de una curva simple cerrada es igual al flujo del rotor a través de una superficie abierta cualquiera que la tenga por borde.
- Se aplica solamente a superficies abiertas. (Se trabaja sobre la curva de contorno C).
- El teorema de la Stokes expresa una relación entre integral de línea definida sobre la curva de contorno de un sólido abierto y una integral de superficie tomada sobre la frontera del mismo.

Ejemplo 7.2. Calcular el flujo del rotor de $\vec{V} = x \vec{i} + 4y \vec{j} + y^2 \vec{k}$ a través de la superficie $z = x^2 + y^2$, de altura $z = 4$.



$$\iint_S (\nabla \wedge \vec{V}) \cdot \vec{n} \, dS = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

$z = x^2 + y^2$ para $z = 4$ así $4 = x^2 + y^2$

$$\nabla \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & 4y & y^2 \end{vmatrix} = 2y \vec{i}$$

$$\vec{n} = \frac{-2x\vec{i} - 2y\vec{j} + 1\vec{k}}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}} \quad ; \quad \cos(\vec{n}, z) = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

$$(\nabla \wedge \vec{V}) \cdot \vec{n} = (2y \vec{i}) \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

$$\iint_S (\nabla \wedge \vec{V}) \cdot \vec{n} \, dS = \iint_T \frac{-4xy}{4x^2 + 4y^2 + 1} (4x^2 + 4y^2 + 1) \, dx \, dy \quad (1)$$

Utilizando coordenadas polares: $\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sen\theta \end{cases} ; \quad J = \rho$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^3 -4\rho^3 \cos\theta \sen\theta \, d\rho \, d\theta = 0$$

Si se calcula utilizando el Teorema de Stokes, se tiene:

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} x dx + 4 dy + y^2 dz$$

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 2 \operatorname{sent} \\ z = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} dx = -2 \operatorname{senc} dt \\ dy = 2 \cos t dt \\ dz = 0 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\int_C \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (-4 \cos t \operatorname{senc} + 8 \cos t) dt = 0$$

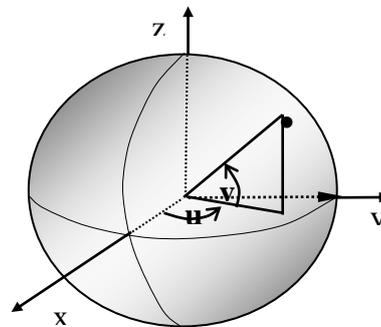
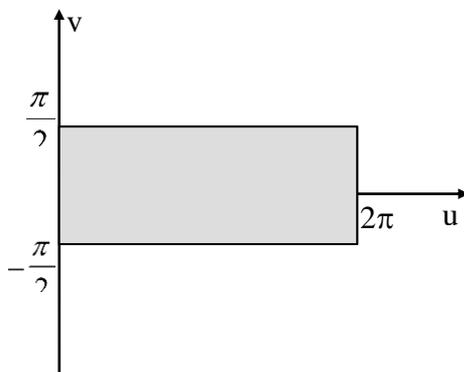
Se ve la conveniencia del uso de $\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r}$ para calcular el flujo del rotor, cuando se puede utilizar el teorema de Stokes.

ANEXO- INTEGRALES DE SUPERFICIE

A. REPRESENTACIÓN PARAMÉTRICA DE SUPERFICIES

Ejemplo 1. Representación paramétrica de una esfera de radio a y centro en el origen.

$$(1) \begin{cases} x = a \cos u \cos v \\ y = a \operatorname{senu} \cos v \\ z = a \operatorname{senv} \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq u \leq 2\pi \\ -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



Representación vectorial: $\vec{r}(u, v) = a \cos u \cos v \vec{i} + a \operatorname{senu} \cos v \vec{j} + a \operatorname{senv} \vec{k}$

Si se eleva al cuadrado las ecuaciones del sistema (1) y sumamos, resulta $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ por lo que todo punto (x, y, z) que satisface (1) pertenece a la esfera.

Los parámetros u y v en este ejemplo pueden interpretarse geoméricamente como los ángulos dibujados en la figura.

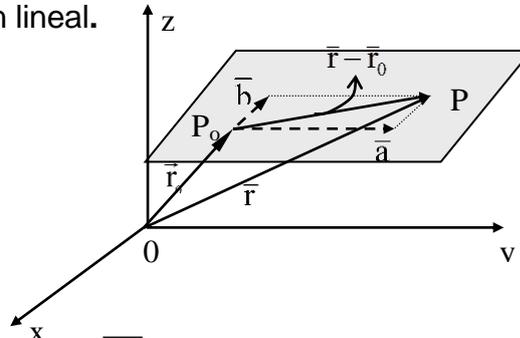
Si el punto (u, v) varía en el rectángulo $T = [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$ los puntos determinados por (1) describen toda la esfera. Observe que el hemisferio superior es la imagen del rectángulo $[0, 2\pi] \times [0, \pi/2]$

Ejemplo 2. Representación paramétrica de un plano

Se recuerda que un plano queda determinado por la condición de pasar por un punto y ser paralelo a dos vectores no paralelos, o sea linealmente independientes. Dados los vectores:

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \quad , \quad \vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$$

Es P un punto del plano sí y solo sí son coplanares los vectores $\overrightarrow{P_0P}$, \vec{a} y \vec{b} , o sea si y solo si existe entre ellos una relación lineal.



Debe ser no nulo el coeficiente de $\overrightarrow{P_0P}$, pues de lo contrario \vec{a} y \vec{b} serían linealmente dependientes, contra lo supuesto; por lo que puede despejarse $\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = \vec{r} - \vec{r}_0$; donde $\vec{r} - \vec{r}_0 = u \vec{a} + v \vec{b}$, o sea:

$$(A) \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + u \vec{a} + v \vec{b} \quad (\vec{a} \text{ y } \vec{b} \text{ linealmente independientes})$$

llamada **ecuación vectorial paramétrica del plano**.

Para cada par de valores de los parámetros u y v, se tiene un punto P del plano, dado por el vector que lo sitúa, desde el origen, y recíprocamente. Proyectando (A) sobre cada eje de coordenadas, o sea multiplicando escalarmente por $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, se obtienen las ecuaciones paramétricas del plano:

$$\begin{cases} x = x_0 + u a_1 + v b_1 \\ y = y_0 + u a_2 + v b_2 \\ z = z_0 + u a_3 + v b_3 \end{cases}$$

Luego la **representación vectorial de un plano** es:

$$\vec{r}(u, v) = (x_0 + a_1 u + b_1 v) \vec{i} + (y_0 + a_2 u + b_2 v) \vec{j} + (z_0 + a_3 u + b_3 v) \vec{k}$$

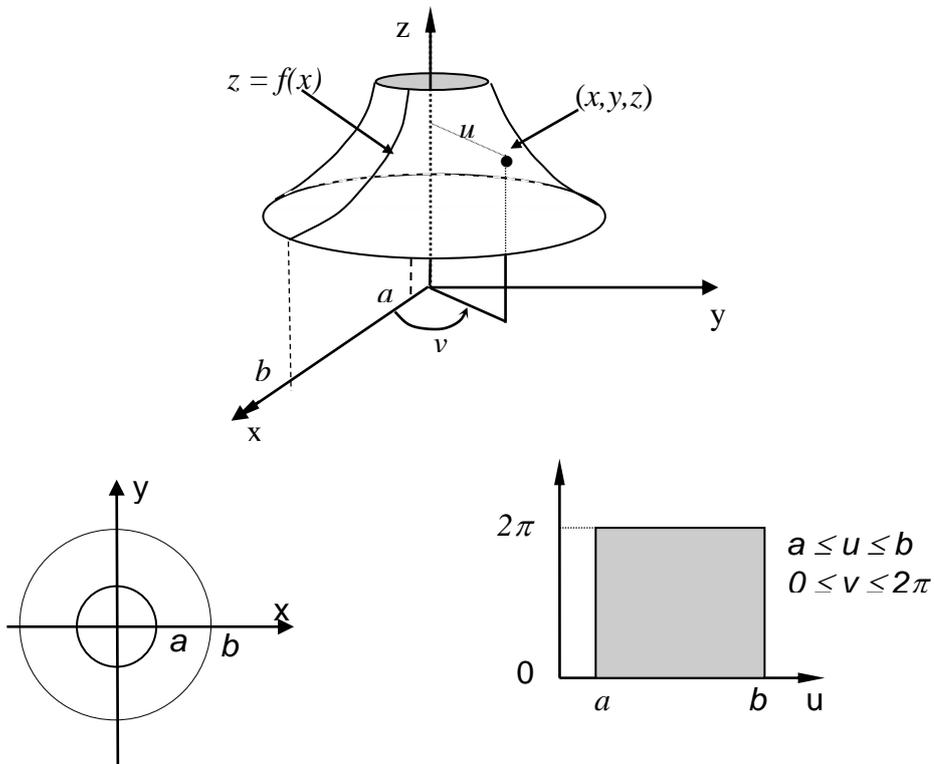
Nota. Los parámetros u y v son coordenadas cartesianas en el plano.

• **Parametrización de una superficie de revolución**

Supongamos una curva C en el plano x z, que gira alrededor del eje z. Sea $z = f(x)$ su ecuación en el plano x z, $a \leq x \leq b$, $a \geq 0$, la superficie de revolución S así engendrada puede representarse por la ecuación vectorial.

$$\vec{r}(u, v) = u \cos v \vec{i} + u \operatorname{sen} v \vec{j} + f(u) \vec{k}$$

donde $(u, v) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$. Los parámetros u y v pueden interpretarse como el radio y el ángulo polar, como se ve en la figura.



Ejemplo 3.

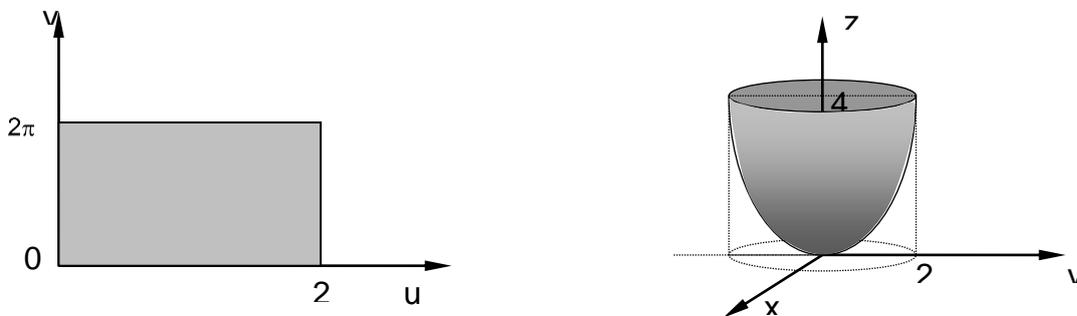
a. **Paraboloide circular** : $z = x^2 + y^2$, $z = 4$

Teniendo en cuenta que la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ en coordenadas paramétricas es:

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 2 \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

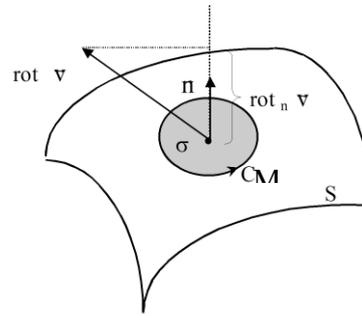
reemplazando en la ecuación del paraboloide circular obtenemos:

$$z = u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v = u^2 (\cos^2 v + \sin^2 v) = u^2$$



Luego las **ecuaciones paramétricas** del paraboloides circular son:

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u^2 \end{cases}$$



y la **ecuación vectorial** del paraboloides dado es

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = u \cos v \vec{i} + u \sin v \vec{j} + u^2 \vec{k} \quad , \quad 0 \leq u \leq 2 \quad , \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

b. cono circular: $z^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad z = 3$

Teniendo en cuenta la ecuación en coordenadas paramétricas de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \end{cases}$$

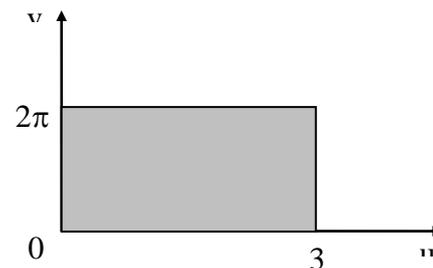
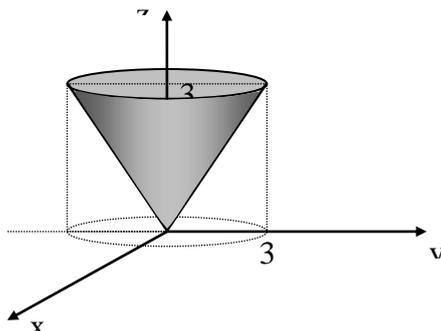
reemplazando en la ecuación del cono circular dado obtenemos:

$$z = \sqrt{u^2 (\cos^2 v + \sin^2 v)} = u$$

Luego, la **ecuación paramétrica** del cono circular dado es:

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u \end{cases} \quad 0 \leq v \leq 2\pi \quad 0 \leq u \leq 3$$

y su **ecuación vectorial** es: $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = u \cos v \vec{i} + u \sin v \vec{j} + u \vec{k}$



B. OTRAS OPERACIONES CON EL OPERADOR $\vec{\nabla}$

1. $\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} U$, esto define el vector **rot grad U** y se calcula mediante el determinante

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} U = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

2. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{f})$, esto se interpreta como **div rot** \vec{f} , y se calcula

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{f}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Si \vec{f} es un **campo gradiente** y ϕ es su función potencial entonces $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{f}) = 0$ o se que la divergencia del rotor de \vec{f} es nula. Para demostrar esto, se ve que $\vec{\nabla} \wedge \vec{f} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \phi) = 0$

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \phi) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} = (\phi_{zy} - \phi_{yz}) \vec{i} + (\phi_{xz} - \phi_{zx}) \vec{j} + (\phi_{yx} - \phi_{xy}) \vec{k} = \vec{0}$$

- **El operador Δ (delta) de Laplace** ($\Delta U = \vec{\nabla}^2$)

El operador Δ (delta) de Laplace, aplicado a un campo escalar $U = U(x,y,z)$ define la *div grad* U :

$$\begin{aligned} \Delta U &= \vec{\nabla}^2 U = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} U) = \text{div grad } U \\ &= \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} U_x + \frac{\partial}{\partial y} U_y + \frac{\partial}{\partial z} U_z \\ &= U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} \end{aligned}$$

Por lo que : $\vec{\nabla}^2 U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}$ denominado **laplaciano** de U

En muchos planteos matemáticos y aplicaciones de Física y de Química se presenta la "**ecuación diferencial de Laplace**", $\nabla^2 U = 0$. Las funciones U que satisfacen esta ecuación se llaman **armónicas**

C. TEOREMA DE GAUSS O DE LA DIVERGENCIA

Sea \mathfrak{R} una región sólida limitada por una superficie cerrada S cuyo vector normal unitario \vec{n} está dirigido al exterior de S . Si \vec{F} es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en \mathfrak{R} entonces:

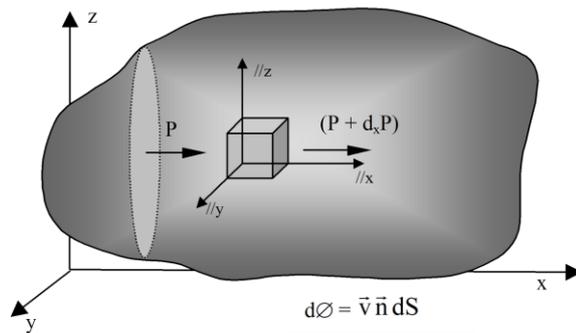
$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{\mathfrak{R}} (\text{div} \vec{F}) \, dx \, dy \, dz$$

Demostración.

Para encontrar la variación total del flujo ($d\Phi$) a través de un volumen elemental, primero encontramos la variación del flujo en cada una de las direcciones x, y, z .

Consideramos un sólido dentro de un campo vectorial, del cual tomamos una porción elemental.

Sea $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$



Se verá con detalle la variación de flujo en una dirección paralela al eje x , las otras direcciones se hacen por analogía.

En el volumen elemental $dx \, dy \, dz$, en la dirección del eje x , el flujo entrante es: $P \, dy \, dz$, el saliente en la misma dirección por la cara opuesta, habiendo variado la magnitud del vector, debido al desplazamiento infinitesimal, es $(P + d_x P) \, dy \, dz$ (d_x es la notación para indicar el diferencial en la dirección del eje x) y el flujo resultante a través de las dos caras paralelas resulta:

$$d_x \Phi = (P + d_x P) \, dy \, dz - P \, dy \, dz = d_x P \, dy \, dz$$

Como se considera una paralela al eje x tenemos $y = \text{cte}$, $z = \text{cte}$. y el diferencial de $P = P(x, y, z)$ es

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} \, dx + \frac{\partial P}{\partial y} \, dy + \frac{\partial P}{\partial z} \, dz = \frac{\partial P}{\partial x} \, dx = d_x P$$

Así el diferencial de flujo en la dirección de x

$$d_x \Phi = d_x P \, dy \, dz = \frac{\partial P}{\partial x} \, dx \, dy \, dz = \frac{\partial P}{\partial x} \, dV \quad (dV = \text{diferencial volumen})$$

Haciendo lo mismo en la dirección del eje z, $x = \text{cte}$, $y = \text{cte}$ obtenemos

$$dR = \frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz = \frac{\partial R}{\partial z} dz = d_z R$$

Es el diferencial de flujo en la dirección de z

$$d_z \Phi = (R + d_z R) dx dy - R dx dy = d_z R dx dy = \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \frac{\partial R}{\partial z} dV$$

Por analogía en la dirección de y, $x = \text{cte}$, $z = \text{cte}$ se obtiene:

$$d_y \Phi = \frac{\partial Q}{\partial y} dV$$

Luego la variación total de flujo en un diferencial de volumen es:

$$d\phi = d_x \phi + d_y \phi + d_z \phi = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$$

$$d\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) (P \vec{i} + Q \vec{j} + R \vec{k}) dV$$

por la definición de divergencia dicha variación se puede expresar como

$$d\Phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV = \text{div } \vec{F} dV$$

Luego de sumar estos diferenciales de flujo y tomando límite cuando ΔV tiende a cero obtenemos

$$\Phi = \iiint_R \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV \quad [1]$$

Además por definición $\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \quad [2]$

igualando [1] y [2] obtenemos:

$$\iiint_R (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

igualdad que también se puede expresar como

$$\iiint_R \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS \quad \text{c.q.d.}$$

D. TEOREMA DE STOKES

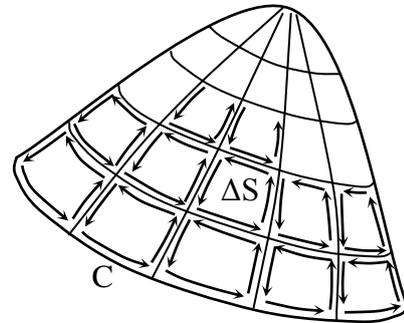
Sea S una superficie con vector normal unitario \vec{n} dirigido al exterior, cuyo contorno es una curva cerrada simple C, suave a trozos. Si \vec{V} es un campo vectorial cuyas funciones

componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta \mathfrak{R} que contiene S y C , entonces:

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{n} dS$$

Demostración:

En cada malla de la superficie se toma un punto P_k interior cualquiera



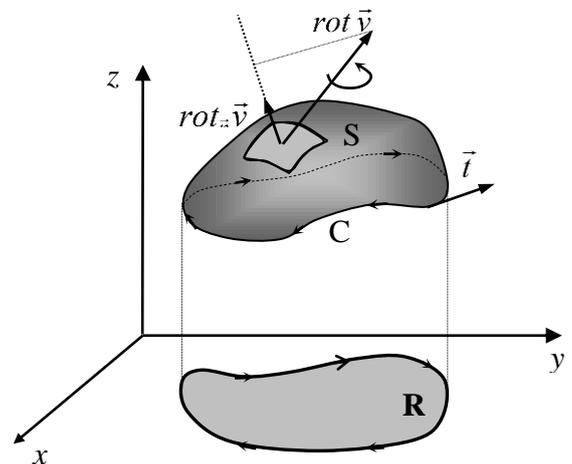
$$(rot_{\vec{n}} \vec{V})_{P_k} = \lim_{\Delta S_k \rightarrow 0} \frac{\oint_{C_k} \vec{V} \cdot d\vec{r}}{\Delta S_k}$$

$$(rot_{\vec{n}} \vec{V})_{P_k} = \frac{\oint_{C_k} \vec{V} \cdot d\vec{r}}{\Delta S_k} + \varepsilon_k$$

$$(rot_{\vec{n}} \vec{V})_{P_k} \cdot \Delta S_k = \oint_{C_k} \vec{V} \cdot d\vec{r} + \varepsilon_k \Delta S_k$$

Sumando todas las mallas

$$\sum_{k=1}^n (rot_{\vec{n}} \vec{V})_{P_k} \cdot \Delta S_k = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} \vec{V} \cdot d\vec{r} + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \Delta S_k$$



Se considera la norma de la partición $N(P) = \max \{\delta_k\} = \delta$, siendo δ_k el diámetro de cada ΔS_k .

Pasando al límite cuando $N(P)$ tiende a cero, y teniendo en cuenta que la suma de las circulaciones sobre los C_k es simplemente la circulación a lo largo de C , pues las integrales sobre los arcos comunes a dos ΔS_k , se anulan mutuamente al tomarse dos veces en sentidos contrarios, y que $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \Delta S_k$ es un infinitésimo, resulta

$$\iint_S rot_{\vec{n}} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

c.q.d.