

Cálculo II – Análisis Matemático II

Leer atentamente las indicaciones

- Debe resolver **cuatro (4)** ejercicios. A saber, el **ejercicio obligatorio** y **elegir tres (3)** de entre los cinco propuestos.
- Se aceptan **solo** cuatro ejercicios.
- Resolver la evaluación en forma escrita en papel, **con lapicera**, indicando **cada ítem** y con letra legible. NO se admite editor de texto de programa computacional.
- En la hoja de solución debe escribir
Registro..... Apellido y N..... Especialidad
- Fotografiar la solución de la evaluación. Enviar **una** foto por cada ejercicio. .
- El correo de envío debe decir en el **asunto**. Especialidad y Apellido
- Enviar a ***evacalculo2 analisis2@gmail.com*** **antes** de las 19 has

Solución Evaluación 1

Registro..... Apellido y N..... Carrera.....

Ejercicio obligatorio.

Completar

- Dar un ejemplo de un campo vectorial de variable vectorial $\vec{F}(x, y) = 3xy\vec{i} + x^2y\vec{j} + y^3\vec{k}$, tal que el conjunto de partida es \mathbb{R}^2 y conjunto de llegada \mathbb{R}^3 .
- Sea la función $z = f(x, y)$, $P_0 \in D$, campo de existencia de la función. Donde $dz = 9 dx - 2 dy$ entonces el *valor máximo* de la derivada direccional es $\sqrt{85}$ y la ecuación del plano tangente en el punto $P_0(1, -1, -2)$ es $z + 2 = 9(x - 1) - 2(y + 1)$.

El máximo valor de la derivada direccional se da en la misma dirección y sentido del vector gradiente, entonces:

$$\begin{aligned} \left| D\bar{y}_{\theta f(P_0)} \right|_{\max} &= \left\| \bar{\nabla} f(P_0) \right\| \cdot \left\| \bar{y}_{\theta} \right\| \cdot \cos(\alpha) \\ \left\| \bar{\nabla} f(P_0) \right\| &= \sqrt{9^2 + (-2)^2} = \sqrt{85} \\ \left\| \bar{y}_{\theta} \right\| &= 1 \\ \cos(\alpha) &= \cos(0) = 1 \\ \left| D\bar{y}_{\theta f(P_0)} \right|_{\max} &= \left\| \bar{\nabla} f(P_0) \right\| \cdot \left\| \bar{y}_{\theta} \right\| \cdot \cos(\alpha) = \sqrt{85} \cdot 1 \cdot 1 = \sqrt{85} \end{aligned}$$

La ecuación del plano tangente viene dada por:

$$z - z_0 = f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0)$$

Reemplazando:

$$z + 2 = 9(x - 1) - 2(y + 1)$$

- c. La interpretación geométrica de la derivada parcial respecto a la *variable* y de una función $z = f(x, y)$, es la pendiente de la recta tangente a la curva que surge de la intersección de la superficie $z=f(x,y)$ con un plano de ecuación $x=x_0$, en el punto P_0 .
- d. La condición que debe cumplir la función $z = f(x, y)$ para ser desarrollada en serie de Taylor hasta el orden 2 es *que debe ser diferenciable hasta el orden 3*.
- e. Sea la función $z = f(x, y)$ diferenciable en un entorno de P_0 entonces el incremento de la función es $\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$, donde ε_1 y $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ siempre que existan F_x y F_y en P_0 .

Ejercicios. Elegir y Resolver solo tres (3).

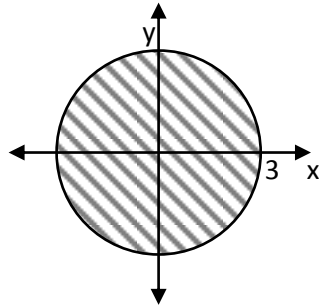
1. Sea la función $z = f(x, y) = e^y x + \sin(x^2 y)$. Determinar una aproximación de segundo orden de la función del en el entorno de $P_0 = (0, 1)$.

$$\begin{aligned} f(P_0) &= 0 \\ f_x &= e^y + \cos(x^2 y) 2xy \rightarrow f_x(P_0) = e \\ f_y &= e^y x + \cos(x^2 y) x^2 \rightarrow f_y(P_0) = 0 \\ f_{xx} &= -\sin(x^2 y) 2xy 2xy + \cos(x^2 y) 2y \rightarrow f_{xx}(P_0) = 2 \\ f_{xy} &= e^y - \sin(x^2 y) x^2 2xy + \cos(x^2 y) 2x \rightarrow f_{xy}(P_0) = e \\ f_{yy} &= e^y x - \sin(x^2 y) x^2 x^2 \rightarrow f_{yy}(P_0) = 0 \\ f(0, 1) &\cong 0 + e(x - 0) + 0(y - 1) + \frac{1}{2} \left(2(x - 0)^2 + 2e(x - 0)(y - 1) + 0(y - 1)^2 \right) \end{aligned}$$

2. Dado $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

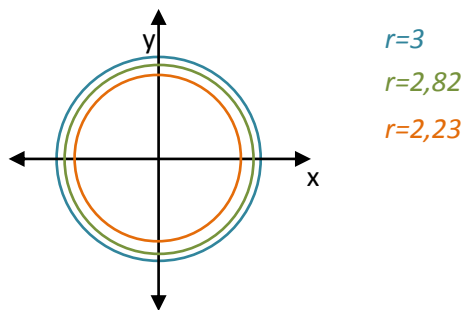
a Indicar el campo de existencia de esta función real y graficar.

$$\text{Dom: } \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 9\}$$



b Determine un mapa de contorno, al menos, con tres curvas de nivel.

$$\begin{aligned} z = 0 &= \sqrt{9 - x^2 - y^2} \rightarrow x^2 + y^2 = 9 \\ z = 1 &= \sqrt{9 - x^2 - y^2} \rightarrow x^2 + y^2 = 8 \\ z = 2 &= \sqrt{9 - x^2 - y^2} \rightarrow x^2 + y^2 = 5 \end{aligned}$$



c ¿Puede afirmar que esta función es diferenciable en el punto P(0,3) ? Justifique.

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{1}{2}(9 - x^2 - y^2)^{-1/2} 2x \rightarrow f_x(0,3) = \text{ind} \\ f_y &= \frac{1}{2}(9 - x^2 - y^2)^{-1/2} 2y \rightarrow f_y(0,3) = \text{ind} \\ x' &= -4t^{-2} \\ y' &= -\text{sen}(2t)2 \end{aligned}$$

La función no es diferenciable en P(0,3) porque las derivadas parciales no son continuas en dicho punto.

3. Dada $z = f(x, y) = y e^{x^2 y^2 + 4}$ donde $x = \frac{4}{t}$ e $y = \cos(2t)$, encuentre $\frac{dz}{dt}$

$$\begin{aligned}
 f_x &= ye^{x^2y^2+4} 2xy^2 \\
 f_y &= 1e^{x^2y^2+4} + ye^{x^2y^2+4} 2x^2y \\
 x' &= -4t^{-2} \\
 y' &= -\operatorname{sen}(2t)2
 \end{aligned}$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned}
 \frac{dz}{dt} &= ye^{x^2y^2+4} 2xy^2 (-4t^{-2}) + (e^{x^2y^2+4} + ye^{x^2y^2+4} 2x^2y) (-\operatorname{sen}(2t)2) \\
 \frac{dz}{dt} &= (\cos(2t)) e^{\left(\frac{4}{t}\right)^2 (\cos(2t))^2 + 4} 2 \left(\frac{4}{t}\right) (\cos(2t))^2 (-4t^{-2}) + \left(e^{\left(\frac{4}{t}\right)^2 (\cos(2t))^2 + 4} + (\cos(2t)) e^{\left(\frac{4}{t}\right)^2 (\cos(2t))^2 + 4} 2 \left(\frac{4}{t}\right)^2 (\cos(2t)) \right) (-\operatorname{sen}(2t)2)
 \end{aligned}$$

¿Qué condiciones deben cumplir las funciones para determinar la derivada anterior?

Condición: $z=f(x,y)$ debe ser diferenciable en (x_0, y_0) , y $x(t)$ e $y(t)$ derivables en t_0 .

4. Encuentre y clasifique los puntos extremos de $f(x, y) = -x^3 + 3xy + y^3 + 2$

Por la condición necesaria:

$$\begin{cases}
 f_x = -3x^2 + 3y = 0 \rightarrow y = x^2 \\
 f_y = 3x + 3y^2 = 0 \rightarrow 3x + 3x^4 = 0 \rightarrow 3x(x^3 + 1) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = -1
 \end{cases}$$

Reemplazando en y se determinan los siguientes puntos críticos: $P_1(0,0)$ y $P_2(-1,1)$.

Por la condición suficiente:

$$\begin{aligned}
 f_{xx} &= -6x \\
 f_{xy} &= 3 \\
 f_{yy} &= 6y
 \end{aligned}$$

$$H = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

Para $P_1(0,0)$: $H = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 \rightarrow$ no hay extremo, punto silla.

Para $P_2(-1,1)$: $H = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 27 \rightarrow$ hay extremo, y como $f_{xx} > 0$ hay un mínimo relativo.

5. Calcular la derivada direccional de $z = \frac{x^2}{2} + \sqrt{y}$ en el punto $(2,1)$, en la dirección del vector $\vec{v} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$.

La derivada direccional se calcula como: $D\bar{y}_{\theta f(P_0)} = \bar{\nabla}_{f(P_0)} \bar{y}_{\theta}$

Donde:

$$\begin{aligned}f_x &= x \rightarrow f_x(P) = 2 \\f_y &= \frac{1}{2} y^{-1/2} \rightarrow f_y(P) = \frac{1}{2} \\ \bar{\nabla}_{f(P_0)} &= 2\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \\ \bar{y}_{\theta} &= \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{6\vec{i} + 8\vec{j}}{\sqrt{36+64}} = \frac{6}{10}\vec{i} + \frac{8}{10}\vec{j}\end{aligned}$$

Luego:

$$D\bar{y}_{\theta f(P)} = \left(2\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) \cdot \left(\frac{6}{10}\vec{i} + \frac{8}{10}\vec{j}\right) = 1.6$$